Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

11 novembre 2025

Compito **C1**- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \to +\infty} \frac{3-x}{2x}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3-x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Per la verifica del limite abbiamo $\left|\left(\frac{3}{2x} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2x}\right| = \frac{3}{2}\left|\frac{1}{x}\right|$; posto $\frac{3}{2}\left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$ otteniamo $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{2\epsilon}{3}$ da cui $|x| > \frac{3}{2\epsilon}$ con in conclusione $x > \frac{3}{2\epsilon}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{3}{2\epsilon}$.

2) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} x + sen(2x) & \text{se } x \le 0 \\ x + q & \text{se } 0 < x \end{cases}$. Si determini il valore del parametro q che rende la funzione continua su tutto l'insieme dei numeri reali.

La funzione è palesemente continua per tutte le $x \neq 0$; per verificare la continuità della funzione nel punto $x = 0$ calcoliamo il limite destro e quello sinistro: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + sen(2x) = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + q = q$. Pertanto la funzione è continua su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $q = 0$.

3) Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ e $g_2(x)$ quattro funzioni infinitesime per $x \to 0$ con $f_2 = o(f_1)$, $g_1 = o(g_2)$ e $3f_1 \asymp g_2$. Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}$.
(con il simbolo $\asymp$ si indica l'equivalenza asintotica fra due funzioni)

Se $f_2 = o(f_1)$ e $g_1 = o(g_2)$ con $x \to 0$, per il limite proposto risulta $\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{o(g_2(x)) + g_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{g_2(x)}$; sempre per $x \to 0$ se $3f_1 \asymp g_2$ vale $\lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot f_1(x)}{g_2(x)} = 1$, quindi
$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot f_1(x)}{g_2(x)} = \frac{1}{3}$.

4) Se la funzione $f(g(x)) = \sqrt{4 + sen\, x}$ e la funzione $g(f(x)) = 4 + sen\sqrt{x}$. Quali sono le espressioni delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$?

Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4 + sen\, x$ abbiamo $f(g(x)) = f(4 + sen\, x) = \sqrt{4 + sen\, x}$ e $g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 4 + sen\sqrt{x}$. Le funzioni richieste sono $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4 + sen\, x$.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot tg\, x - 3x^2}{x^2}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-5}{x}\right)^x$.

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot tg\, x - 3x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} tg\, x - 3 = (\to 0) - 3 = -3$.

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-5}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x = e^{-5}$.

Compito C2- Riccarelli

1) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \to +\infty} \frac{5+2x}{x}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{5+2x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x} + 2 = 2$. Per la verifica del limite abbiamo $\left|\left(\frac{5}{x}+2\right) - 2\right| = \left|\frac{5}{x}\right| = 5\left|\frac{1}{x}\right|$; posto $5\left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$ otteniamo $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{\epsilon}{5}$ da cui $|x| > \frac{5}{\epsilon}$ con in conclusione $x > \frac{5}{\epsilon}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \frac{5}{\epsilon}$.

2) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} x + 3\cos x & \text{se } x \le 0 \\ x + q & \text{se } 0 < x \end{cases}$. Si determini il valore del parametro q che rende la funzione continua su tutto l'insieme dei numeri reali.

La funzione è palesemente continua per tutte le $x \neq 0$; per verificare la continuità della funzione nel punto $x = 0$ calcoliamo il limite destro e quello sinistro: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + 3\cos x = 3$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + q = q$. Pertanto la funzione è continua su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $q = 3$.

3) Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ e $g_2(x)$ quattro funzioni infinitesime per $x \to 0$ con $f_2 = o(f_1)$, $g_2 = o(g_1)$ e $f_1 \asymp 2g_1$. Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}$.

(con il simbolo $\asymp$ si indica l'equivalenza asintotica fra due funzioni)

Se $f_2 = o(f_1)$ e $g_2 = o(g_1)$ con $x \to 0$, per il limite proposto risulta $\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$; sempre per $x \to 0$ se $f_1 \asymp 2g_1$ vale $\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{2 \cdot g_1(x)} = 1$, quindi

$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to 0} 2 \cdot \frac{f_1(x)}{2 \cdot g_1(x)} = 2$.

4) Se la funzione $f(g(x)) = 1 + tg\, x^2$ e la funzione $g(f(x)) = (1 + tg\, x)^2$. Quali sono le espressioni delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$?

Se $f(x) = 1 + tg\, x$ e $g(x) = x^2$ abbiamo $f(g(x)) = f(x^2) = 1 + tg\, x^2$ e $g(f(x)) = g(1 + tg\, x) = (1 + tg\, x)^2$. Le funzioni richieste sono $f(x) = 1 + tg\, x$ e $g(x) = x^2$.

5) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot arcsen\, x + 2x^3}{x^2}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x}$.

$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot arcsen\, x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{arcsen\, x}{x} + 2x = (\to 1) + (\to 0) = 1$.

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x\right)^2 = ((\to e^3))^2 = e^6$.