

PROGRAMMA DEFINITIVO DEL CORSO DI MATEMATICA GENERALE A.A. 2025-26

Prof. Samuele Riccarelli

PERIODO: I semestre

INIZIO LEZIONI: Lunedì 29 settembre 2025.

ORARIO DELLE LEZIONI: Lunedì ore 12.00-14.00 (Aula Caparrelli A); Martedì ore 8.15-10.00 (Aula Caparrelli A); Giovedì ore 10.00-12.0 (Aula Caparrelli B).

Argomenti trattati nel precorso:

Rette nel piano: equazione della retta, coefficiente angolare, determinazione del coefficiente angolare, ordinata all'origine. Rette parallele e perpendicolari. Parabole: vertice, intersezioni con gli assi, grafico di una parabola. Disequazioni con polinomi di I^o e II^o grado. Potenze ad esponente naturale, intero e razionale. Proprietà delle potenze. Funzioni esponenziali: grafico delle funzioni esponenziali con base $0 < a < 1$ e base $a > 1$. Disequazioni contenenti termini di tipo esponenziale. Logaritmi: Definizione e proprietà dei logaritmi: logaritmo di un prodotto, di un quoziente e di una potenza; cambio di base in un logaritmo, reciproco di un logaritmo. Grafico delle funzioni logaritmiche con base $0 < a < 1$ e $a > 1$. Disequazioni contenenti termini logaritmici. Funzioni circolari (trigonometriche): misura degli angoli in radianti, definizione di seno e coseno di un angolo. Tangente di un angolo. Grafico delle funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$. Relazioni tra il seno ed il coseno di angoli opposti, complementari e supplementari. Formule di somma e sottrazione, duplicazione e bisezione. Disequazioni contenenti termini trigonometrici. Teoremi di trigonometria per i triangoli rettangoli: come trovare un cateto mediante l'ipotenusa e mediante l'altro cateto. Teoremi di trigonometria sui triangoli qualunque: Teorema della corda, Teorema dei seni e Teorema del coseno, area di un triangolo tramite il seno. Insiemi, elementi, appartenenza, sottoinsiemi, inclusione, insieme vuoto, insieme universo, insieme delle parti. Operazioni sugli insiemi: complementare, unione, intersezione, differenza. Proprietà delle operazioni insiemistiche. Leggi di De Morgan. Numeri naturali e loro proprietà. I numeri interi e le loro proprietà. I numeri razionali e le loro proprietà. Numeri decimali finiti e decimali periodici. I numeri irrazionali. Esistenza dei numeri irrazionali. Sezioni nei razionali, elemento separatore. Definizione assiomatica dei numeri reali: assiomi della somma, del prodotto, dell'ordine e di completezza. La retta reale. Insiemi finiti ed infiniti. Insiemi numerabili. Numerabilità degli interi e dei razionali. Non numerabilità dei numeri reali. Valore assoluto e sue proprietà, la funzione valore assoluto, la disuguaglianza triangolare.

ELEMENTI DI LOGICA: Proposizioni, connettivi logici: non, o, e, implicazione, doppia implicazione. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti. Tavole "di verità" di proposizioni logiche. Tautologie. I quantificatori universale ed esistenziale.

RELAZIONI E FUNZIONI: Prodotto cartesiano di due o più insiemi. Relazioni tra due insiemi. Definizione di funzione. Dominio e codominio, grafico, immagine, campo di esistenza, variabile indipendente e dipendente, immagine di un insieme. Funzioni di una o più variabili. Funzioni iniettive e surgettive. Corrispondenze biunivoche. Funzione inversa. Composizione di funzioni.

I NUMERI REALI: La retta reale. Definizione di maggiorante, minorante, estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme di numeri reali. Insiemi limitati ed illimitati.

ELEMENTI DI TOPOLOGIA: Definizione di distanza o metrica. Distanza Euclidea nella retta reale. Intorno di un punto. Definizione di punto interno, di frontiera e punto isolato; definizione di punto di accumulazione e punto di aderenza. Gli insiemi Interno, Frontiera, Derivato e Chiusura. Insiemi Aperti, Chiusi e né Aperti né Chiusi.

LIMITI E CONTINUITÀ: La retta reale estesa o compattificata. Definizione di limite finito o infinito per una funzione quando la variabile tende ad un valore finito o infinito. Limite destro e limite sinistro. Limite per eccesso e per difetto. Definizione di funzione continua. Continuità da destra e da sinistra. Discontinuità di I^o, II^o e III^o specie. Teoremi di unicità del limite, della permanenza del segno, del confronto. Limite di somma, differenza, prodotto, reciproco e quoziente di funzioni. Teorema sul limite della funzione composta.

Continuità di somma, differenza, prodotto, reciproco, quoziente e composizione di funzioni. Limiti delle funzioni elementari. Continuità delle funzioni elementari. Forme indeterminate di tipo aritmetico.

Infinitesimi ed infiniti. Casi di limite non indeterminato nella somma, differenza, prodotto, reciproco e quoziente di funzioni infinite, infinitesime, limitate e lontane da zero. Limiti dei polinomi e dei quozienti di polinomi. Definizione di funzione monotona. Limiti di funzioni monotone e relativo Teorema. Il numero di Nepero "e". I limiti notevoli e loro applicazioni. Confronto tra infinitesimi e tra infiniti. Infinitesimi o infiniti di ordine superiore, dello stesso ordine e non confrontabili. Parte principale di un infinitesimo e di un infinito. La relazione di equivalenza asintotica e la relazione di "o piccolo"; loro definizione e loro proprietà. Principio di sostituzione per gli infinitesimi e per gli infiniti. I Teoremi sulle funzioni continue in un intervallo: Teorema di Weierstrass (o del massimo e del minimo), Teorema degli zeri, Teorema di Darboux (o dei valori intermedi), Teorema di punto fisso, Teorema della continuità della funzione inversa. Grafico di una funzione e grafico della sua inversa. Determinazione dell'espressione della funzione inversa. Funzioni potenza e loro inverse. Le inverse delle funzioni circolari: $\text{arcsen}x$, $\text{arccos}x$, $\text{arctg}x$. Loro grafici e proprietà.

CALCOLO DIFFERENZIALE: Rapporto incrementale e suo significato geometrico. Definizione di funzione derivabile in un punto. Significato geometrico della derivata. Equazione della retta tangente. Derivata destra e sinistra. Relazione tra continuità e derivabilità. I tre casi di funzione continua ma non derivabile. Punti a tangente verticale, punti angolosi e punti di cuside. Il differenziale, sua definizione e suo significato geometrico. Formula di approssimazione mediante il differenziale. Relazione tra derivabilità e differenziabilità. La funzione derivata. Funzioni derivate delle funzioni elementari. Regole di derivazione: derivata della somma, differenza, prodotto, reciproco, quoziente, inversa e composizione di funzioni. Derivate successive. Relazione tra la monotonia di una funzione ed il segno della sua derivata prima. Punti di massimo e minimo relativo. Punti stazionari. Teoremi di Fermat, di Rolle e di Lagrange. Applicazioni e conseguenze del Teorema di Lagrange: funzioni a derivata positiva e condizione sufficiente per la derivabilità. Teoremi di Cauchy e di De L'Hopital. Risoluzione delle forme indeterminate. Polinomio di Taylor e di Mac Laurin di una funzione. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità del polinomio di Taylor. Sviluppo del polinomio di Mac Laurin per le funzioni: esponenziale, seno, coseno e logaritmo. Definizione di funzione convessa o concava. Epigrafico di una funzione. Punti di flesso. Convessità e segno della derivata seconda. Asintoti di una funzione: orizzontali, verticali ed obliqui. Studio dell'andamento del grafico di una funzione.

INTEGRALE DI RIEMANN: Definizione di funzione integrabile, l'integrabilità delle funzioni continue. La funzione integrale e il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrale indefinito e il concetto di funzione primitiva. Metodi per la ricerca delle primitive. Integrazione per sostituzione e integrazione per parti, integrazione logaritmica. Calcolo dell'integrale definito di una funzione continua mediante le primitive.

VETTORI E MATRICI: definizione di vettore, operazioni di somma e prodotto per uno scalare; modulo di un vettore, prodotto scalare. Teorema del coseno, angolo fra due vettori. Disuguaglianza di Swartz. Combinazione lineare fra vettori, vettori linearmente dipendenti ed indipendenti. Teorema sull'indipendenza lineare di vettori. Definizione di matrice, matrici quadrate e rettangolari, i vettori riga e i vettori colonna, operazioni fra matrici: somma, prodotto per uno scalare e prodotto righe per colonne, la matrice potenza, la matrice trasposta, la matrice simmetrica; matrici particolari: diagonale e triangolare.

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI: Campo di esistenza, distanza in R^n . Derivate direzionali, rapporto incrementale parziale e derivate parziali, vettore gradiente. Funzione lineare a n variabili, funzione differenziabile, Teorema del differenziale totale. Funzione derivata parziale, matrice hessiana, Teorema di Swartz. Ottimizzazione a più variabili, condizioni del primo e secondo ordine, punti critici e la ricerca della loro natura a due variabili tramite le derivate parziali seconde.

TESTO DI RIFERIMENTO: A. Guerraggio: "Matematica Generale", Ed. Bollati-Boringhieri (2000) – Torino.