Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

12 gennaio 2026

Compito $\mathbb{G}5$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $\neg(q\, e\, p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

1)

p	q	$\neg(q\, e\, p)$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg(q\, e\, p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = (1+2x)^k$; se $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 4$, quale è il valore del parametro k?

2) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+2x)^k - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+2x)^k - 1}{2x} \cdot 2 =$
$(\to k) \cdot 2 = 2k$. Posto $2k = 4$ si ottiene facilmente $k = 2$.

3) (6 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \frac{x}{3-x}$ e $g(x) = e^{2-x}$. Determinare l'espressione della funzione composta $f\big(g(x)\big)$ e della sua funzione inversa.

3) $f\big(g(x)\big) = f\big(e^{2-x}\big) = \frac{e^{2-x}}{3-e^{2-x}}$. Per l'espressione della funzione inversa posto $\frac{e^{2-x}}{3-e^{2-x}} = y$ si ha $e^{2-x} = y(3-e^{2-x})$ da cui $e^{2-x}(1+y) = 3y$ con $e^{2-x} = \frac{3y}{1+y}$ che equivale a $2-x = log\left(\frac{3y}{1+y}\right)$ ed infine $x = 2 - log\left(\frac{3y}{1+y}\right)$. Espressione della funzione inversa: $y = 2 - log\left(\frac{3x}{1+x}\right)$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{sen x^2}$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x - e^x + 2x^2}{e^{3x} + 3x^2}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{sen x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{sen x^2}{x^2}} = \frac{(\to 1)}{(\to 1)} = 1.$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{sen x^2} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{sen x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} \cdot \cancel{2x}}{cos x^2 \cdot \cancel{2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}}{cos x^2} = \frac{(\to 1)}{(\to 1)} = 1.$

Per il secondo limite abbiamo che $\lim_{x \to -\infty} 3^x = \lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} 2x^2 = \lim_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$, pertanto per $x \to -\infty$, $3^x - e^x = o(2x^2)$ e $e^{3x} = o(3x^2)$ e di conseguenza $\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x - e^x + 2x^2}{e^{3x} + 3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = (4 - x^2)e^{x^2}$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione presenta due punti di flesso)

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = (4 - (-x)^2)e^{(-x)^2} = (4 - x^2)e^{x^2} = y(x)$.
Funzione pari, la studiamo solo sul semiasse positivo ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $(4 - x^2)e^{x^2} > 0$ se
$4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$. Funzione positiva in $[0, 2[$, negativa in $]2, +\infty[$; intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(2, 0)$. $y(0) = 4e^0 = 4$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

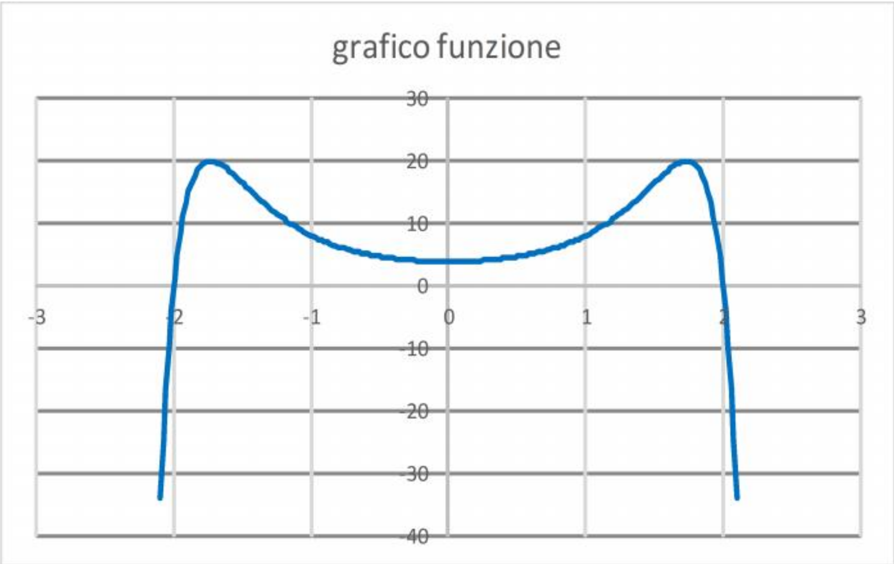
$$\lim_{x \to +\infty} (4 - x^2)e^{x^2} = (\to -\infty) \cdot e^{(\to +\infty)} = (\to -\infty) \cdot (\to +\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(4 - x^2)e^{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - x^2}{x} \cdot e^{x^2} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x} - x\right)e^{x^2} = ((\to 0) - (\to +\infty)) \cdot e^{(\to +\infty)} =$$

$(\to -\infty) \cdot (\to +\infty) = -\infty$. La funzione non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y' = -2x \cdot e^{x^2} + (4 - x^2)e^{x^2} \cdot 2x =$
$2x \cdot e^{x^2} \cdot (3 - x^2)$. Nel semiasse positivo delle ascisse $y' > 0$ se
$3 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 3 \Rightarrow x < \sqrt{3}$. Funzione strettamente crescente in $[0, \sqrt{3}]$, strettamente decrescente in $[\sqrt{3}, +\infty[$; punto di minimo relativo per $x = 0$, punto di massimo assoluto per $x = \sqrt{3}$, con $y(\sqrt{3}) = \left(4 - (\sqrt{3})^2\right)e^{(\sqrt{3})^2} = e^3$.

Concavità e convessità: se la funzione presenta due punti di flesso, per la simmetria della stessa, uno avrà ascissa positiva ed uno ascissa negativa, l'esistenza del punto di minimo per $x = 0$ e del punto di massimo per $x = \sqrt{3}$ implica che la funzione è convessa in $[0, \alpha]$, concava in $[\alpha, +\infty[$ con $0 < \alpha < \sqrt{3}$. α ascissa del punto di flesso.
Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(\frac{x^3 + \sqrt{x}}{x}\right) dx$.

6) $\int\left(\frac{x^3+\sqrt{x}}{x}\right)dx \;=\; \int\left(\frac{x^3}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx \;=\; \int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \;=$

$\int\left(x^2+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx \;=\; \frac{1}{3}x^3+2x^{\frac{1}{2}}+c \;=\; \frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}+c\,.$

7) (7 punti) Determinare l'espressione del polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione $f(x)=x\cdot sen(3x)-log(1+2x)$.

7) *I metodo - Classico*: la funzione $f(x)$ è derivabile per ogni ordine nel punto $x=0$, quindi il polinomio di MacLaurin di secondo grado è

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2\,.$$

$$f(x)=x\cdot sen(3x)-log(1+2x).$$

$$f(0)=0\cdot sen(0)-log(1+0)=0-log(1)=0.$$

$$f'(x)=\;1\cdot sen(3x)+x\cdot cos(3x)\cdot 3-\frac{1}{1+2x}\cdot 2$$

$$=\;sen(3x)+3x\cdot cos(3x)-\frac{2}{1+2x}\,.$$

$$f'(0)=\;sen(0)+0\cdot cos(0)-\frac{2}{1+0}\;=\;-2.$$

$$f''(x)=\;cos(3x)\cdot 3+3\cdot cos(3x)-3x\cdot sen(3x)\cdot 3+\frac{2\cdot 2}{(1+2x)^2}$$

$$=\;6\cdot cos(3x)-9x\cdot sen(3x)+\frac{4}{(1+2x)^2}\,.$$

$$f''(0)=\;6\cdot cos(0)-0\cdot sen(0)+\frac{4}{(1+0)^2}\;=10.$$

Quindi $P_2(x)=0-2\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot x^2\;=\;-2x+5x^2$.

II metodo - Alternativo: ricordiamo che i polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $senx$ e $log(1+x)$ sono rispettivamente $P_2(x)=x$ e $P_2(x)=x-\frac{1}{2}x^2$. Quindi i polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $sen(3x)$ e $log(1+2x)$ sono rispettivamente $P_2(x)=3x$ e $P_2(x)=2x-\frac{1}{2}(2x)^2\;=$

$2x-2x^2$. Concludiamo con il polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione richiesta: $P_2(x)=x\cdot 3x-\left(2x-2x^2\right)\;=\;3x^2-2x+2x^2\;=$

$-2x+5x^2$.

8) (8 punti) Studiare la natura dei punti critici della funzione $f(x,y)=y^3-2x^2-75y+12x\,.$

8) $\nabla f=(-4x+12,3y^2-75)$.

FOC: $\begin{cases}-4x+12=0\\ 3y^2-75=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=12\\ 3y^2=75\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=\;\pm 5\end{cases}$; due punti critici $P_{1,2}(3,\;\pm 5)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -24y$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = -120 < 0$. P_1 punto di sella.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = 120 > 0$; $f''_{xx}(P_2) = -4 < 0$. P_2 punto di massimo.

Compito $\mathbb{G}6$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $\neg(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q\, e\, p)$.

1)

p	q	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$q\, e\, p$	$\neg(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q\, e\, p)$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = (1+3x)^k$; se $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = 9$, quale è il valore del parametro k?

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(1+3x)^k - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(1+3x)^k - 1}{3x} \cdot 3 =$
$(\to k) \cdot 3 = 3k$. Posto $3k = 9$ si ottiene facilmente $k = 3$.

3) (6 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \dfrac{x}{3-x}$ e $g(x) = e^{2-x}$. Determinare l'espressione della funzione composta $g\big(f(x)\big)$ e della sua funzione inversa.

3) $g\big(f(x)\big) = g\left(\dfrac{x}{3-x}\right) = e^{2-\frac{x}{3-x}}$. Per l'espressione della funzione inversa posto $e^{2-\frac{x}{3-x}} = y$ si ha $2 - \dfrac{x}{3-x} = log\, y$ da cui $\dfrac{x}{3-x} = 2 - log\, y$ con $x = (3-x)(2 - log\, y)$ che equivale a $x(3 - log\, y) = 3(2 - log\, y)$ ed infine $x = \dfrac{3(2 - log\, y)}{3 - log\, y}$. Espressione della funzione inversa: $y = \dfrac{3(2 - log\, x)}{3 - log\, x}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen\big(e^{-x^2} - 1\big)}{x^2}$;
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3^{-x} + e^{-x} + 3x^2}{e^{-x} + 2x^2}$.

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen\big(e^{-x^2} - 1\big)}{x^2} = \lim_{x \to 0} -\dfrac{sen\big(e^{-x^2} - 1\big)}{e^{-x^2} - 1} \cdot \dfrac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} =$
$-(\to 1) \cdot (\to 1) = -1$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen\big(e^{-x^2} - 1\big)}{x^2} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to 0} \dfrac{sen\big(e^{-x^2} - 1\big)}{x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \dfrac{cos\big(e^{-x^2} - 1\big)e^{-x^2} \cdot \big(-\cancel{2x}\big)}{\cancel{2x}} =$

$\lim_{x \to 0} -cos\Big(e^{-x^2} - 1\Big)e^{-x^2} = -(\to 1) \cdot (\to 1) = -1$.

Per il secondo limite abbiamo che $\lim_{x \to +\infty} 3^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} 3x^2 = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$, pertanto per $x \to +\infty$,

$3^{-x}+e^{-x}=o(3x^2)$ e $e^{-x}=o(2x^2)$ e di conseguenza

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{-x}+e^{-x}+3x^2}{e^{-x}+2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y=\left(2-x^2\right)e^{x^2}$. (Non è richiesto il calcolo e lo studio della derivata seconda, la funzione presenta due punti di flesso)

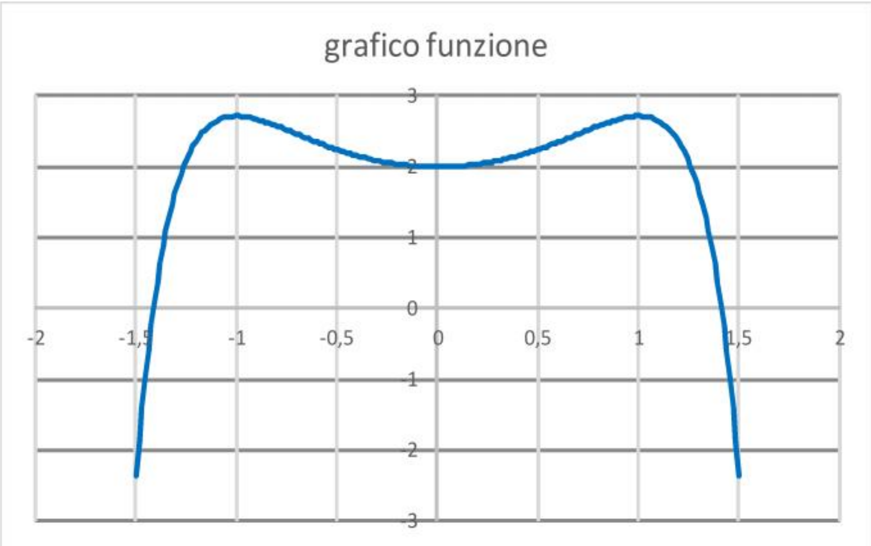
5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x)=\left(2-(-x)^2\right)e^{(-x)^2}=\left(2-x^2\right)e^{x^2}=y(x)$.
Funzione pari, la studiamo solo sul semiasse positivo ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $\left(2-x^2\right)e^{x^2}>0$ se
$2-x^2>0\Rightarrow x^2<2\Rightarrow x<\sqrt{2}$. Funzione positiva in $[0,\sqrt{2}[$, negativa in $]\sqrt{2},+\infty[$; intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A\left(\sqrt{2},0\right)$.
$y(0)=2e^0=2$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-x^2\right)e^{x^2}=(\to-\infty)\cdot e^{(\to+\infty)}=(\to-\infty)\cdot(\to+\infty)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-x^2)e^{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^2}{x}\cdot e^{x^2}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-x\right)e^{x^2}=((\to0)-(\to+\infty))\cdot e^{(\to+\infty)}=$$
$(\to-\infty)\cdot(\to+\infty)=-\infty$. La funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y'=-2x\cdot e^{x^2}+\left(2-x^2\right)e^{x^2}\cdot 2x=$
$2x\cdot e^{x^2}\cdot\left(1-x^2\right)$. Nel semiasse positivo delle ascisse $y'>0$ se
$1-x^2>0\Rightarrow x^2<1\Rightarrow x<1$. Funzione strettamente crescente in $[0,1]$, strettamente decrescente in $[1,+\infty[$; punto di minimo relativo per $x=0$, punto di massimo assoluto per $x=1$, con $y(1)=\left(2-1^2\right)e^{1^2}=e$.
Concavità e convessità: se la funzione presenta due punti di flesso, per la simmetria della stessa, uno avrà ascissa positiva ed uno ascissa negativa, l'esistenza del punto di minimo per $x=0$ e del punto di massimo per $x=1$ implica che la funzione è convessa in $[0,\alpha]$, concava in $[\alpha,+\infty[$ con $0<\alpha<1$. α ascissa del punto di flesso.
Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x}} \right) dx$.

6) $\int \left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x}} \right) dx \; = \; \int \left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}} \right) dx \; = \; \int \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx \; =$
$\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c \; = \; \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c$.

7) (7 punti) Determinare l'espressione del polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione $f(x) = f(x) = sen(2x) - x \cdot log(1+2x)$.

7) *I metodo - Classico*: la funzione $f(x)$ è derivabile per ogni ordine nel punto $x = 0$, quindi il polinomio di MacLaurin di secondo grado è

$$P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 .$$

$$f(x) = sen(2x) - x \cdot log(1+2x).$$

$$f(0) = sen(0) - 0 \cdot log(1+0) = 0.$$

$$f'(x) = \; cos(2x) \cdot 2 - 1 \cdot log(1+2x) - x \cdot \frac{1}{1+2x} \cdot 2$$

$$= \; 2 \cdot cos(2x) - log(1+2x) - \frac{2x}{1+2x} .$$

$$f'(0) = \; 2 \cdot cos(0) - log(1+0) - \frac{0}{1+0} \; = 2.$$

$$f''(x) = \; -2 \cdot sen(2x) \cdot 2 - \frac{1}{1+2x} \cdot 2 - \frac{2 \cdot (1+2x) - 2x \cdot 2}{(1+2x)^2}$$

$$= \; -4 \cdot sen(2x) - \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{(1+2x)^2} .$$

$$f''(0) = \; -4 \cdot sen(0) - \frac{2}{1+0} - \frac{2}{(1+0)^2} \; = \; -4.$$

Quindi $P_2(x) = 0 + 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot x^2 \; = 2x - 2x^2$.

II metodo - Alternativo: ricordiamo che i polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $senx$ e $log(1+x)$ sono rispettivamente $P_2(x) = x$ e $P_2(x) = x - \frac{1}{2} x^2$. Quindi i polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $sen(2x)$ e $log(1+2x)$ sono rispettivamente $P_2(x) = 2x$ e $P_2(x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 \; =$ $2x - 2x^2$. Concludiamo con il polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione richiesta: $P_2(x) = 2x - x \cdot \left(2x - 2x^2 \right) \; = \; 2x - 2x^2 + 2x^3 \; =$ $2x - 2x^2$, con il termine cubico che viene eliminato perché viene richiesto il polinomio di secondo grado.

8) (8 punti) Studiare la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = y^3 + 2x^2 - 3y + 20x$.

8) $\nabla f = (4x + 20, 3y^2 - 3)$.

FOC: $\begin{cases} 4x+20=0 \\ 3y^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=-20 \\ 3y^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=\pm 1 \end{cases}$; due punti critici $P_{1,2}(-5, \pm 1)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 24y$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 24 > 0$; $f''_{xx}(P_1) = 4 > 0$. P_1 punto di minimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = -24 < 0$. P_2 punto di sella.