Università degli Studi di Siena
Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)
12 gennaio 2026

Compito $\mathbb{G}1$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $q \Rightarrow (\neg(q\, e\, p) \Leftrightarrow p)$.

1)

p	q	$\neg(q\, e\, p)$	$\neg(q\, e\, p) \Leftrightarrow p$	$q \Rightarrow (\neg(q\, e\, p) \Leftrightarrow p)$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	V

.

2) (7 punti) Sia dato l'insieme $A =]-\pi^2, \pi^2[\cap [-20, 0]$. Determinare $D(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione di A, $\overset{\circ}{A}$ l'insieme dei punti interni di A, ed indicare se A è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso.

2) Da $3 < \pi < 4$ deriva $9 < \pi^2 < 16$ quindi $A =]-\pi^2, \pi^2[\cap [-20, 0] =]-\pi^2, 0]$; $D(A) = [-\pi^2, 0]$, $\overset{\circ}{A} =]-\pi^2, 0[$ e A è un insieme né aperto né chiuso in quanto è un intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra.

3) (6 punti) Siano date le funzioni $f(x) = 3 + x^2$ e $g(x) = \sqrt{9x} + k$, dove k è un parametro reale. Determinare l'espressione della funzione composta $g\big(f(x)\big)$ e determinare il valore del parametro k tale per cui $\lim\limits_{x \to 1} g\big(f(x)\big) = 5$.

3) $g\big(f(x)\big) = g\big(3 + x^2\big) = \sqrt{9\big(3 + x^2\big)} + k$.
$\lim\limits_{x \to 1} g\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{9\big(3 + x^2\big)} + k = \sqrt{9\big(\to 4\big)} + k = 6 + k$; posto $6 + k = 5$ si ottiene facilmente $k = -1$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos(2x^2)}{x^4}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 2x^2}{5x + 3x^2}\right)^{x^2}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos(2x^2)}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos(2x^2)}{(2x^2)^2} \cdot 4 = \left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot 4 = 2.$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos(2x^2)}{x^4} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(2x^2)}{x^4} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{sen(2x^2) \cdot \cancel{4}\cancel{x}}{\cancel{4}x^{\cancel{3}2}} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(2x^2)}{x^2} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}\ FI.$$

Applichiamo nuovamente il Teorema: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(2x^2)}{x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{cos(2x^2) \cdot \cancel{4}^2 \cancel{x}}{\cancel{2}\cancel{x}} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(2x^2) \cdot 2}{1} = (\to 1) \cdot 2 = 2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 2x^2}{5x + 3x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x} + 2\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{5}{x} + 3\right)}\right)^{x^2} = \left(\frac{(\to 2)}{(\to 3)}\right)^{(\to +\infty)} =$$

$$\left(\to \frac{2}{3}\right)^{(\to +\infty)} = 0\,.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$y = \frac{3}{1 - e^x}$.

5) $C.E.: 1 - e^x \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0, C.E. = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{3}{1 - e^{-x}}$. $y(-x)$ è funzione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$, funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\frac{3}{1 - e^x} > 0$ se $1 - e^x > 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow x < 0$.

Funzione positiva in $]-\infty, 0[$, negativa in $]0, +\infty[$; nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{1 - e^x} = \frac{3}{1 - e^{(\to -\infty)}} = \frac{3}{1 - (\to 0)} = 3$; $AsOrSx$ di equazione $y = 3$.

$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{1 - e^x} = \frac{3}{1 - e^{(\to 0^-)}} = \frac{3}{1 - (\to 1^-)} = \frac{3}{(\to 0^+)} = +\infty$; AsV di equazione $x = 0$.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{1 - e^x} = \frac{3}{1 - e^{(\to 0^+)}} = \frac{3}{1 - (\to 1^+)} = \frac{3}{(\to 0^-)} = -\infty$.

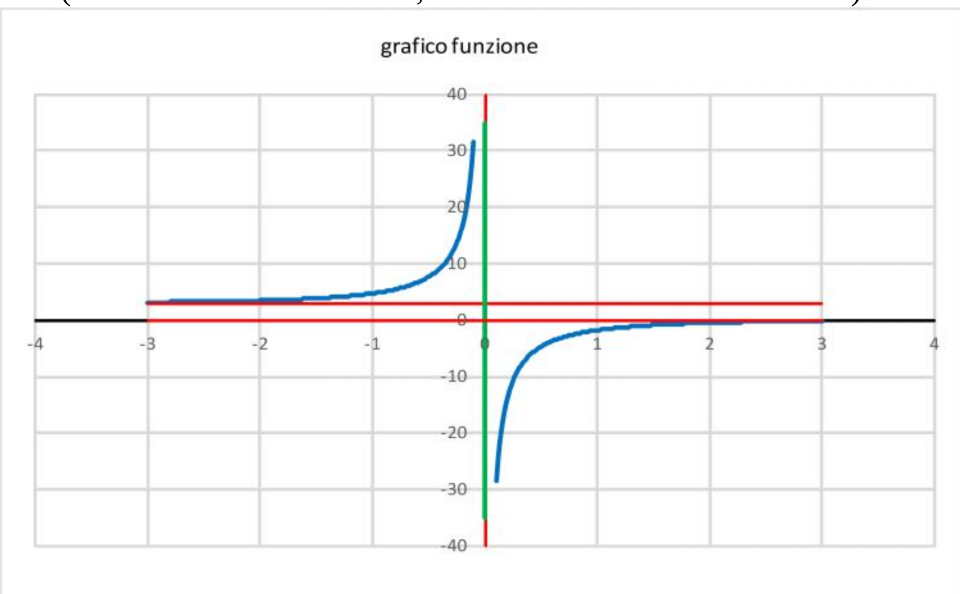
$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1 - e^x} = \frac{3}{1 - e^{(\to +\infty)}} = \frac{3}{1 - (\to +\infty)} = 0$; $AsOrDx$ di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{3 \cdot (-e^x)}{(1 - e^x)^2} = \frac{3e^x}{(1 - e^x)^2}$. $y' > 0 \; \forall x \in C.E.$.

Funzione strettamente crescente sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{3e^x(1 - e^x)^2 - 3e^x \cdot 2 \cdot (1 - e^x) \cdot (-e^x)}{(1 - e^x)^4} = \frac{3e^x(1 - e^x)(1 - e^x + 2e^x)}{(1 - e^x)^4} = \frac{3e^x(1 - e^x)(1 + e^x)}{(1 - e^x)^4}$. $y'' > 0$ se $1 - e^x > 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 0[$, strettamente concava in $]0, +\infty[$, la funzione non presenta punti di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto verticale, in rosso i due asintoti orizzontali):



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(x^2 - \sqrt{2x} - \sqrt[4]{x} \right) dx$.

6) $\int \left(x^2 - \sqrt{2x} - \sqrt[4]{x} \right) dx = \int \left(x^2 - \sqrt{2} x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} \right) dx =$
$\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x\sqrt{2x} - \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + c$.

7) (7 punti) Siano date le matrici: $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calcolare il prodotto matriciale $\mathbb{A} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{B}^T$. (Con X^T si indica la matrice trasposta di X)

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{B}^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^T =$

$\begin{bmatrix} -2 & -9 \\ -5 & 1 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -36 \\ -14 & 4 \\ 6 & 48 \end{bmatrix}$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:
$f(x, y, z, w) = x + \frac{y}{w^3 - 2z}$.

8) $f'_x = 1$; $f'_y = \frac{1}{w^3 - 2z}$;

$$f'_z = -\frac{y \cdot (-2)}{(w^3 - 2z)^2} = \frac{2y}{(w^3 - 2z)^2};$$

$$f'_w = -\frac{y \cdot (3w^2)}{(w^3 - 2z)^2} = -\frac{3yw^2}{(w^3 - 2z)^2}.$$

Compito $\mathbb{G}2$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $q \Rightarrow ((q\, o\, p) \Leftrightarrow p)$.

1)

p	q	$q\, o\, p$	$(q\, o\, p) \Leftrightarrow p$	$q \Rightarrow ((q\, o\, p) \Leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

2) (7 punti) Sia dato l'insieme $A =]-\pi^2, \pi^2[\cup]2, 16[$. Determinare $D(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione di A, $\overset{\circ}{A}$ l'insieme dei punti interni di A, ed indicare se A è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso.

2) Da $3 < \pi < 4$ deriva $9 < \pi^2 < 16$ quindi $A =]-\pi^2, \pi^2[\cup]2, 16[=]-\pi^2, 16[$;
$D(A) = [-\pi^2, 16]$, $\overset{\circ}{A} =]-\pi^2, 16[$ e A è un insieme aperto in quanto è un intervallo aperto.

3) (6 punti) Siano date le funzioni $f(x) = 2 + x^2$ e $g(x) = 1 - k\sqrt{x}$, dove k è un parametro reale. Determinare l'espressione della funzione composta $f\big(g(x)\big)$ e determinare il valore del parametro k tale per cui $\lim_{x \to 4} f\big(g(x)\big) = 2$.

3) $f\big(g(x)\big) = f\big(1 - k\sqrt{x}\big) = 2 + \big(1 - k\sqrt{x}\big)^2$.

$\lim_{x \to 4} f\big(g(x)\big) = \lim_{x \to 4} 2 + \big(1 - k\sqrt{x}\big)^2 = 2 + \big(1 - 2k\big)^2$; posto $2 + \big(1 - 2k\big)^2 = 2$ si ottiene facilmente $\big(1 - 2k\big)^2 = 0$, da cui $k = \dfrac{1}{2}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x^2 - x^3)}{5x^2}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 6x^2}{12x + 5x^2}\right)^{-x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x^2 - x^3)}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x^2 - x^3)}{x^2 - x^3} \cdot \dfrac{x^2 - x^3}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x^2 - x^3)}{x^2 - x^3} \cdot \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{x}{5}\right) = (\to 1) \cdot \left(\to \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{1}{5}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x^2 - x^3)}{5x^2} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x^2 - x^3)}{5x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \dfrac{cos(x^2 - x^3) \cdot (2x - 3x^2)}{10x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{cos(x^2 - x^3) \cdot \cancel{x} \cdot (2 - 3x)}{10\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} \dfrac{cos(x^2 - x^3) \cdot (2 - 3x)}{10} = \dfrac{(\to 1) \cdot (\to 2)}{10} = \dfrac{1}{5}$.

$\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 6x^2}{12x + 5x^2}\right)^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x} + 6\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{12}{x} + 5\right)}\right)^{-x} = \left(\dfrac{(\to 6)}{(\to 5)}\right)^{(\to -\infty)} = \left(\to \dfrac{6}{5}\right)^{(\to -\infty)} = 0$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{2}{e^{-x} - 1}$.

5) $C.E.$: $e^{-x} - 1 \neq 0 \Rightarrow e^{-x} \neq 1 \Rightarrow -x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$,

$C.E. = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \dfrac{2}{e^{x} - 1}$. $y(-x)$ è funzione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$, funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\dfrac{2}{e^{-x} - 1} > 0$ se $e^{-x} - 1 > 0 \Rightarrow e^{-x} > 1 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione positiva in $]-\infty, 0[$, negativa in $]0, +\infty[$; nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2}{e^{-x} - 1} = \dfrac{2}{e^{(\to +\infty)} - 1} = \dfrac{2}{(\to +\infty)} = 0$; $AsOrSx$ di equazione $y = 0$.

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{2}{e^{-x} - 1} = \dfrac{2}{e^{(\to 0^+)} - 1} = \dfrac{2}{(\to 1^+) - 1} = \dfrac{2}{(\to 0^+)} = +\infty$; AsV di equazione $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{e^{-x}-1} = \dfrac{2}{e^{(\to 0^-)}-1} = \dfrac{2}{(\to 1^-)-1} = \dfrac{2}{(\to 0^-)} = -\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^{-x}-1} = \dfrac{2}{e^{(\to -\infty)}-1} = \dfrac{2}{(\to 0)-1} = -2$; $AsOrDx$ di equazione $y = -2$.

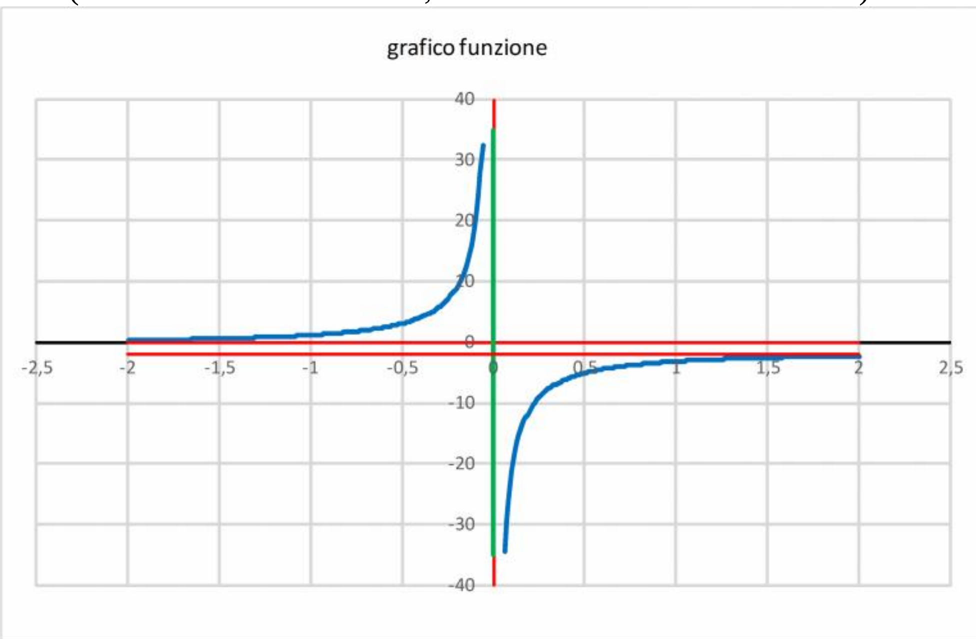
Crescenza e decrescenza: $y' = -\dfrac{2 \cdot (-e^{-x})}{(e^{-x}-1)^2} = \dfrac{2e^{-x}}{(e^{-x}-1)^2}$. $y' > 0 \; \forall x \in C.E.$.

Funzione strettamente crescente sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità:

$y'' = \dfrac{-2e^{-x}(e^{-x}-1)^2 - 2e^{-x} \cdot 2 \cdot (e^{-x}-1) \cdot (-e^{-x})}{(e^{-x}-1)^4} = \dfrac{-2e^{-x}(e^{-x}-1)(e^{-x}-1-2e^{-x})}{(e^{-x}-1)^4} = \dfrac{2e^{-x}(e^{-x}-1)(e^{-x}+1)}{(e^{-x}-1)^4}$. $y'' > 0$ se $e^{-x}-1 > 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 0[$, strettamente concava in $]0, +\infty[$, la funzione non presenta punti di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto verticale, in rosso i due asintoti orizzontali):



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(x^3 - \sqrt{2x} + \sqrt[6]{x}\right) dx$.

6) $\int \left(x^3 - \sqrt{2x} + \sqrt[6]{x}\right) dx = \int \left(x^3 - \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{6}}\right) dx = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + c = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x\sqrt{2x} - \dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + c$.

7) (7 punti) Siano date le matrici: $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcolare il prodotto matriciale $\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B}$. (Con X^T si indica la matrice trasposta di X)

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -9 & -13 \\ 15 & 9 \\ -9 & -15 \end{bmatrix}.$$

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:
$f(x,\, y,\, z,\, w) = x^3 - \dfrac{w}{2z - y^3}$.

8) $f'_x = 3x^2$; $\quad f'_y = \dfrac{w \cdot (-3y^2)}{(2z - y^3)^2} = -\dfrac{3y^2 w}{(2z - y^3)^2}$;

$f'_z = \dfrac{w \cdot 2}{(2z - y^3)^2} = \dfrac{2w}{(2z - y^3)^2}$; $\quad f'_w = -\dfrac{1}{2z - y^3}$.

Compito $\mathbb{G}3$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $((q\, o\, p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow p$.

1)

p	q	$q\, o\, p$	$(q\, o\, p) \Rightarrow q$	$((q\, o\, p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	F
F	F	F	V	F

.

2) (7 punti) Sia dato l'insieme $A = [-e^2, e^2] \cup]0, 10[$. Determinare $\delta(A)$ l'insieme dei punti di frontiera di A, $\mathring{A}$ l'insieme dei punti interni di A, ed indicare se A è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso.

2) Da $2 < e < 3$ deriva $4 < e^2 < 9$ quindi $A = [-e^2, e^2] \cup]0, 10[= [-e^2, 10[$;
$\delta(A) = \{-e^2, 10\}$, $\mathring{A} =]-e^2, 10[$ e A è un insieme né aperto né chiuso in quanto è un intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra.

3) (6 punti) Siano date le funzioni $f(x) = 1 + x^2$ e $g(x) = \sqrt{4x} - k$, dove k è un parametro reale. Determinare l'espressione della funzione composta $g\big(f(x)\big)$ e determinare il valore del parametro k tale per cui $\lim\limits_{x \to 0} g\big(f(x)\big) = 1$.

3) $g\big(f(x)\big) = g\big(1 + x^2\big) = \sqrt{4\big(1 + x^2\big)} - k$.
$\lim\limits_{x \to 0} g\big(f(x)\big) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4\big(1 + x^2\big)} - k = 2 - k$; posto $2 - k = 1$ si ottiene facilmente $k = 1$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(1 - cosx)}{3x^2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x + 4x^2}{2x + 3x^2}\right)^{-x^3}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(1 - cosx)}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(1 - cosx)}{1 - cosx} \cdot \dfrac{1 - cosx}{x^2} \cdot \dfrac{1}{3} =$
$(\to 1) \cdot \left(\to \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg(1-cosx)}{3x^2} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(1-cosx)}{3x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{(1+tg^2(1-cosx)) \cdot senx}{6x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+tg^2(1-cosx)}{6} \cdot \frac{senx}{x} = \frac{(\to 1)}{6} \cdot (\to 1) = \frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x+4x^2}{2x+3x^2} \right)^{-x^3} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x}+4\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x}+3\right)} \right)^{-x^3} = \left(\frac{(\to 4)}{(\to 3)} \right)^{(\to +\infty)} =$$

$$\left(\to \frac{4}{3} \right)^{(\to +\infty)} = +\infty .$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{1}{e^{-3x}-1}$.

5) $C.E.$: $e^{-3x}-1 \neq 0 \Rightarrow e^{-3x} \neq 1 \Rightarrow -3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$,
$C.E. = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{1}{e^{3x}-1}$. $y(-x)$ è funzione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$, funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\frac{1}{e^{-3x}-1} > 0$ se $e^{-3x}-1 > 0 \Rightarrow e^{-3x} > 1 \Rightarrow -3x > 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione positiva in $]-\infty, 0[$, negativa in $]0, +\infty[$; nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-3x}-1} = \frac{1}{e^{(\to +\infty)}-1} = \frac{1}{(\to +\infty)} = 0$; $AsOrSx$ di equazione $y = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{e^{-3x}-1} = \frac{1}{e^{(\to 0^+)}-1} = \frac{1}{(\to 1^+)-1} = \frac{1}{(\to 0^+)} = +\infty$; AsV di equazione $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{-3x}-1} = \frac{1}{e^{(\to 0^-)}-1} = \frac{1}{(\to 1^-)-1} = \frac{1}{(\to 0^-)} = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{-3x}-1} = \frac{1}{e^{(\to -\infty)}-1} = \frac{1}{(\to 0)-1} = -1$; $AsOrDx$ di equazione $y = -1$.

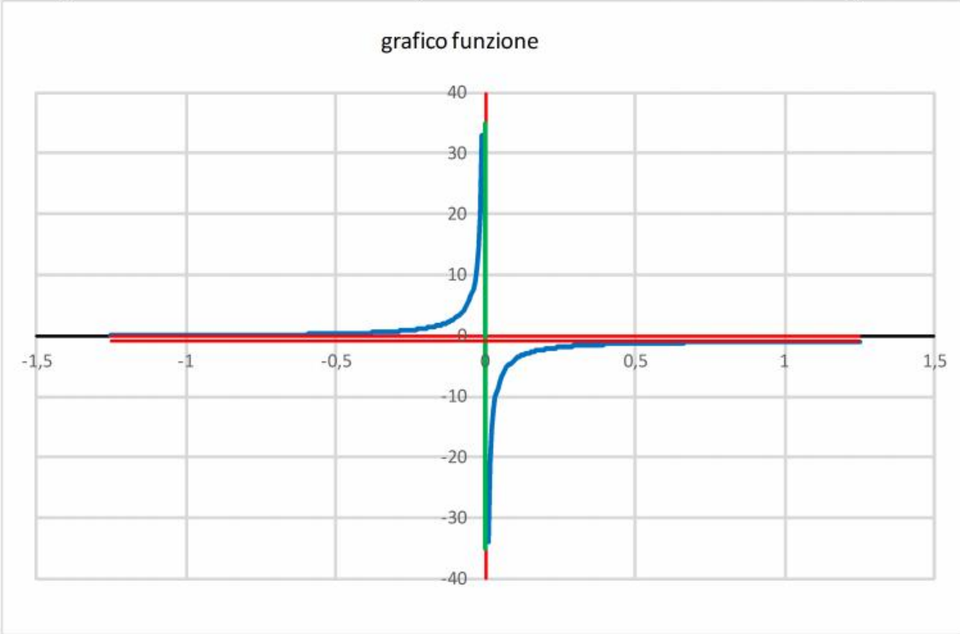
Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{-3e^{-3x}}{(e^{-3x}-1)^2} = \frac{3e^{-3x}}{(e^{-3x}-1)^2}$. $y' > 0 \; \forall x \in C.E.$.
Funzione strettamente crescente sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità:

$$y'' = \frac{-9e^{-3x}(e^{-3x}-1)^2 - 3e^{-3x} \cdot 2 \cdot (e^{-3x}-1) \cdot (-3e^{-3x})}{(e^{-3x}-1)^4} =$$

$$\frac{-9e^{-3x}(e^{-3x}-1)(e^{-3x}-1-2e^{-3x})}{(e^{-3x}-1)^4} = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x}-1)(e^{-3x}+1)}{(e^{-3x}-1)^4}$$. $y'' > 0$ se $e^{-3x}-1 > 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 0[$, strettamente concava in $]0, +\infty[$, la funzione non presenta punti di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto verticale, in rosso i due asintoti orizzontali):



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int (x^3 + \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x})\, dx$.

6) $\int (x^3 + \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x})\, dx \ = \ \int \left(x^3 + x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}}\right) dx \ =$
$\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} + c \ = \ \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{12}{5}x\sqrt[4]{x} + c$.

7) (7 punti) Siano date le matrici: $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e

$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcolare il prodotto matriciale $\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B}$. (Con X^T si indica la matrice trasposta di X)

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 9 & -17 \\ 15 & 13 \\ -9 & -11 \end{bmatrix}$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:
$f(x,\, y,\, z,\, w) = w - 5x^2 + \frac{y}{z-y}$.

8) $f'_x = -10x$; $f'_y = \frac{1 \cdot (z-y) - y \cdot (-1)}{(z-y)^2} = \frac{z}{(z-y)^2}$;

$f'_z = -\frac{y}{(z-y)^2}$; $f'_w = 1$.

Compito $\mathbb{G}4$

1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $((q\,e\,p) \Rightarrow p) \Leftrightarrow q$.

1)

p	q	$q\,e\,p$	$(q\,e\,p) \Rightarrow p$	$((q\,e\,p) \Rightarrow p) \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

.

2) (7 punti) Sia dato l'insieme $A = [-e^2, e^2] \cap [0, 10]$. Determinare $\delta(A)$ l'insieme dei punti di frontiera di A, $\overset{\circ}{A}$ l'insieme dei punti interni di A, ed indicare se A è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso.

2) Da $2 < e < 3$ deriva $4 < e^2 < 9$ quindi $A = [-e^2, e^2] \cap [0, 10] = [0, e^2]$;
$\delta(A) = \{0, e^2\}$, $\overset{\circ}{A} =]0, e^2[$ e A è un insieme chiuso in quanto è un intervallo chiuso.

3) (6 punti) Siano date le funzioni $f(x) = 3 + x^2$ e $g(x) = 1 - k\sqrt{x}$, dove k è un parametro reale. Determinare l'espressione della funzione composta $f\big(g(x)\big)$ e determinare il valore del parametro k tale per cui $\lim\limits_{x \to 9} f\big(g(x)\big) = 3$.

3) $f\big(g(x)\big) = f\big(1 - k\sqrt{x}\big) = 3 + \big(1 - k\sqrt{x}\big)^2$.
$\lim\limits_{x \to 9} f\big(g(x)\big) = \lim\limits_{x \to 9} 3 + \big(1 - k\sqrt{x}\big)^2 = 3 + \big(1 - 3k\big)^2$; posto
$3 + \big(1 - 3k\big)^2 = 3$ si ottiene facilmente $\big(1 - 3k\big)^2 = 0$, da cui $k = \dfrac{1}{3}$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x^2)}{4x^4}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x + x^2}{10x + 3x^2}\right)^{-x^2}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x^2)}{4x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x^2)}{(x^2)^2} \cdot \dfrac{1}{4} = \left(\to \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x^2)}{4x^4} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x^2)}{4x^4} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{sen(x^2) \cdot \cancel{2x}}{\cancel{16}^{8} x^{\cancel{3}\,2}} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x + x^2}{10x + 3x^2}\right)^{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x} + 1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{10}{x} + 3\right)}\right)^{-x^2} =$$

$$\left(\frac{(\to 1)}{(\to 3)}\right)^{(\to -\infty)} = \left(\to \frac{1}{3}\right)^{(\to -\infty)} = +\infty.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \dfrac{1}{1 - e^{4x}}$.

5) $C.E.$: $1 - e^{4x} \neq 0 \Rightarrow e^{4x} \neq 1 \Rightarrow 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$,
$C.E. = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \dfrac{1}{1 - e^{-4x}}$. $y(-x)$ è funzione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$, funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\dfrac{1}{1 - e^{4x}} > 0$ se $1 - e^{4x} > 0 \Rightarrow e^{4x} < 1 \Rightarrow$

$4x < 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione positiva in $]-\infty, 0[$, negativa in $]0, +\infty[$; nessuna intersezione con gli assi.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1-e^{4x}} = \frac{1}{1-e^{(\to -\infty)}} = \frac{1}{1-(\to 0)} = 1$; $AsOrSx$ di equazione $y = 1$.

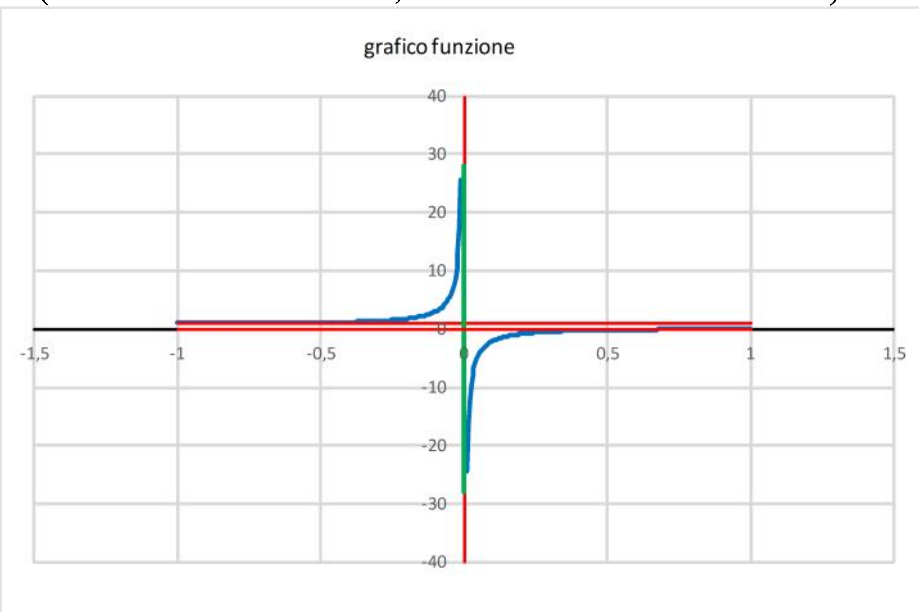
$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-e^{4x}} = \frac{1}{1-e^{(\to 0^-)}} = \frac{1}{1-(\to 1^-)} = \frac{1}{(\to 0^+)} = +\infty$; AsV di equazione $x = 0$.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-e^{4x}} = \frac{1}{1-e^{(\to 0^+)}} = \frac{1}{1-(\to 1^+)} = \frac{1}{(\to 0^-)} = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1-e^{4x}} = \frac{1}{1-e^{(\to +\infty)}} = \frac{1}{(\to -\infty)} = 0$; $AsOrDx$ di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{-4e^{4x}}{(1-e^{4x})^2} = \frac{4e^{4x}}{(1-e^{4x})^2}$. $y' > 0\ \forall x \in C.E.$.
Funzione strettamente crescente sia in $]-\infty, 0[$ che in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{16e^{4x}(1-e^{4x})^2 - 4e^{4x} \cdot 2 \cdot (1-e^{4x}) \cdot (-4e^{4x})}{(1-e^{4x})^4} =$
$\frac{16e^{4x}(1-e^{4x})(1-e^{4x}+2e^{4x})}{(1-e^{4x})^4} = \frac{16e^{4x}(1-e^{4x})(1+e^{4x})}{(1-e^{4x})^4}$. $y'' > 0$ se
$1-e^{4x} > 0 \Rightarrow x < 0$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 0[$, strettamente concava in $]0, +\infty[$, la funzione non presenta punti di flesso.
Grafico (in verde l'asintoto verticale, in rosso i due asintoti orizzontali):



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(x^2 + \sqrt{x} - \sqrt[4]{3x}\right) dx$.

6) $\int \left(x^2 + \sqrt{x} - \sqrt[4]{3x}\right) dx = \int \left(x^2 + x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{3}x^{\frac{1}{4}}\right) dx =$
$\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}\sqrt[4]{3} \cdot x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{4}{5}x\sqrt[4]{3x} + c$.

7) (7 punti) Siano date le matrici: $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e

$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calcolare il prodotto matriciale $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{B}$. (Con X^T si indica la matrice trasposta di X)

7) $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 38 \\ 15 & 25 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione:

$f(x,\, y,\, z,\, w) = (w - 3x) \cdot \left(z - y^3\right)$.

8) $f'_x = -3\left(z - y^3\right)$; $f'_y = -3y^2(w - 3x)$;

$f'_z = w - 3x$; $f'_w = z - y^3$.