

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

2 febbraio 2026

Compito F1

- 1) (6 punti) Sia dato l'insieme $C = [-2\pi, 2\pi] \cap [-2, 10]$. Indicare se l'insieme C è aperto, chiuso o né aperto, né chiuso; e determinare:
- i. $MA(C)$, l'insieme dei maggioranti dell'insieme C ;
 - ii. $Sup(C)$, l'estremo superiore dell'insieme C .
- 1) Da $3 < \pi < 4$ deriva $6 < 2\pi < 8$ quindi $C = [-2\pi, 2\pi] \cap [-2, 10] = [-2, 2\pi]$; C è un insieme chiuso in quanto intersezione fra due intervalli chiusi.
 $MA(C) = [2\pi, +\infty[$ e $Sup(C) = 2\pi$.
- 2) (6 punti) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - x^2}$.
- 2) La funzione proposta è una funzione irrazionale di indice pari, quindi il suo campo d'esistenza è ottenuto ponendo il suo radicando maggiore o uguale a zero;
 $x^4 - x^2 \geq 0$ equivale a $x^2(x^2 - 1) \geq 0$ vera se $x = 0$ oppure $x^2 - 1 \geq 0$ ovvero $x^2 \geq 1$ che è verificata per $x \leq -1 \vee x \geq 1$.
 $C.E. =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$.
- 3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = \text{sen}(kx) + \text{tg}(3x)$, con k parametro reale diverso da 0; se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$, quale è il valore del parametro k ?
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(kx) + \text{tg}(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(kx)}{kx} \cdot k + \frac{\text{tg}(3x)}{3x} \cdot 3 =$
 $(\rightarrow 1) \cdot k + (\rightarrow 1) \cdot 3 = k + 3$. Posto $k + 3 = \frac{1}{2}$ si ottiene facilmente $k = -\frac{5}{2}$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg}(x^3 - 3x^2)}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 4e^x}{5 + 3e^x}$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg}(x^3 - 3x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg}(x^3 - 3x^2)}{x^3 - 3x^2} \cdot (x - 3) =$
 $(\rightarrow 1) \cdot (\rightarrow -3) = -3$.
Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg}(x^3 - 3x^2)}{x^2} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg}(x^3 - 3x^2)}{x^2} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+(x^3-3x^2)^2} \cdot (3x^2 - 6x)}{\frac{2x}{1+(x^3-3x^2)^2} \cdot 3 \cdot (x-2)} =$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1+(x^3-3x^2)^2} \cdot 3\cancel{x} \cdot (x-2)}{\cancel{1+(x^3-3x^2)^2} \cdot 2\cancel{x} \cdot 3 \cdot (x-2)} =$$
- $$\frac{(\rightarrow 1) \cdot 3 \cdot (\rightarrow -2)}{2} = -3.$$
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 4e^x}{5 + 3e^x} = \frac{(\rightarrow -\infty)}{(\rightarrow +\infty)} \text{ FI. Raccogliamo al numeratore ed al}$$
- denominatore la quantità e^x : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 4e^x}{5 + 3e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(3e^{-x} - 4)}{e^x(5e^{-x} + 3)} =$
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{-x} - 4}{5e^{-x} + 3} = \frac{(\rightarrow -4)}{(\rightarrow 3)} = -\frac{4}{3}.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 4e^x}{5 + 3e^x} = \frac{(-\infty)}{(+\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 4e^x}{5 + 3e^x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4e^x}{3e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = \frac{e^x}{1+x}.$$

5) C.E.: $1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, C.E. = $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\frac{e^x}{1+x} > 0$ se $1+x > 0 \Rightarrow x > -1$. Funzione negativa in $] -\infty, -1[$, positiva in $] -1, +\infty[$; $y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+x} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow -\infty)} = 0; \text{ AsOrSx di equazione } y = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{e^x}{1+x} = \frac{(\rightarrow e^{-1})}{(\rightarrow 0^\pm)} = \pm \infty; \text{ AsV di equazione } x = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} = +\infty \text{ in quanto per } x \rightarrow +\infty, 1+x = o(e^x).$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} = \frac{(\rightarrow +\infty)}{(\rightarrow +\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+x^2} = +\infty \text{ in quanto per } x \rightarrow +\infty, x+x^2 = o(e^x). \text{ A destra la funzione non presenta asintoti.}$$

$$\text{Crescenza e decrescenza: } y' = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2} \cdot y' > 0 \text{ se } x > 0.$$

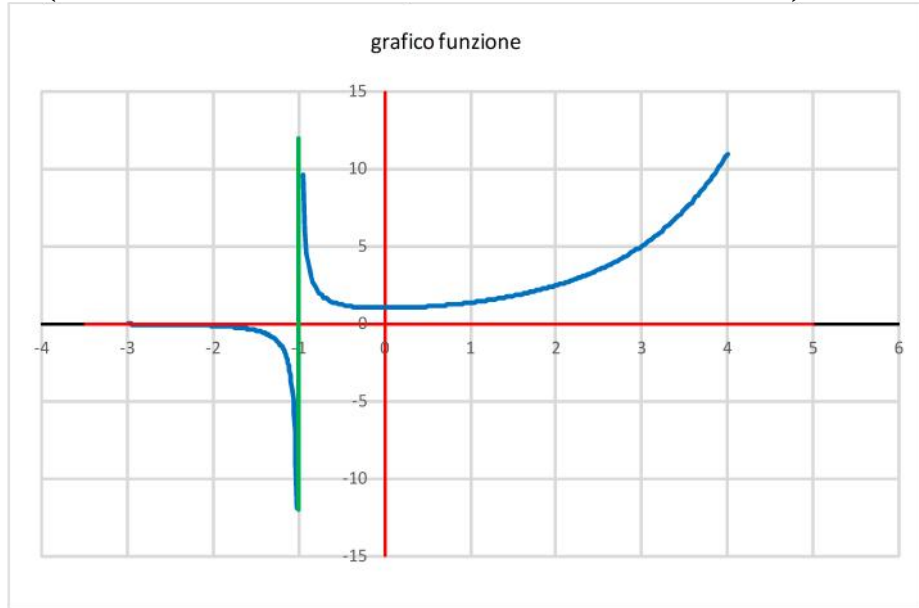
Funzione strettamente decrescente sia in $] -\infty, -1[$ che in $] -1, 0[$, strettamente crescente in $[0, +\infty[$, punto di minimo relativo $A(0, 1)$.

$$\text{Concavità e convessità: } y'' = \frac{(e^x + xe^x)(1+x)^2 - xe^x \cdot 2 \cdot (1+x)}{(1+x)^4} =$$

$$\frac{e^x(1+x)((1+x)^2 - 2x)}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x)(1+x^2)}{(1+x)^4} \cdot y'' > 0 \text{ se}$$

$1+x > 0 \Rightarrow x > -1$. Funzione strettamente concava in $] -\infty, -1[$, strettamente convessa in $] -1, +\infty[$, la funzione non presenta punti di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto verticale, in rosso l'asintoto orizzontale):



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_{-1}^3 (\sqrt[3]{2x} - e^x) dx$.

$$\begin{aligned} 6) \int_{-1}^3 (\sqrt[3]{2x} - e^x) dx &= \int_{-1}^3 (\sqrt[3]{2x^{\frac{1}{3}}} - e^x) dx = \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{4}{3}} - e^x \right)_{-1}^3 = \\ &= \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{2} \cdot 3^{\frac{4}{3}} - e^3 \right) - \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{2} \cdot (-1)^{\frac{4}{3}} - e^{-1} \right) = \\ &= \left(\frac{9}{4} \sqrt[3]{6} - e^3 \right) - \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{2} - e^{-1} \right) = \frac{3}{4} (3\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}) - e^3 + e^{-1} \approx -16.57. \end{aligned}$$

Soluzione alternativa (integrazione per sostituzione): posto $2x = t$, risulta $x = \frac{1}{2}t$

$$\begin{aligned} \text{con } dx &= \frac{1}{2}dt \text{ e quindi } \int_{-1}^3 (\sqrt[3]{2x} - e^x) dx = \int_{-2}^6 (\sqrt[3]{t} - e^{\frac{1}{2}t}) \frac{1}{2}dt = \\ &= \int_{-2}^6 \left(t^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{2}t} \right) \frac{1}{2}dt = \left(\frac{3}{8} \cdot t^{\frac{4}{3}} - e^{\frac{1}{2}t} \right)_{-2}^6 = \\ &= \left(\frac{3}{8} \cdot 6^{\frac{4}{3}} - e^3 \right) - \left(\frac{3}{8} \cdot (-2)^{\frac{4}{3}} - e^{-1} \right) = \left(\frac{9}{4} \sqrt[3]{6} - e^3 \right) - \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{2} - e^{-1} \right) = \\ &= \frac{3}{4} (3\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}) - e^3 + e^{-1} \approx -16.57. \end{aligned}$$

7) (7 punti) Verificare che alla funzione $f(x) = 2x + 4^x$ è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 2]$ e determinare l'unico valore x_0 che soddisfa il Teorema.

7) La funzione $f(x)$ è continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile nell'intervallo $[1, 2]$, il Teorema è applicabile. $f(2) = 2 \cdot 2 + 4^2 = 20$, $f(1) = 2 \cdot 1 + 4^1 = 6$, $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 6}{1} = 14$; $f'(x) = 2 + 4^x \cdot \log 4$. Posto $2 + 4^x \cdot \log 4 = 14$ otteniamo $4^x \cdot \log 4 = 12$ da cui $4^x = \frac{12}{\log 4}$ ed infine $x = \log_4 \left(\frac{12}{\log 4} \right) \cdot x_0 = \log_4 \left(\frac{12}{\log 4} \right) \approx 1.56$.

8) (8 punti) Sia data la funzione $z(x, y, w) = x^3y - y^2e^w$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $P(1, 1, 0)$.

8) Il piano tangente al grafico della funzione ha equazione

$$z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ w - w_P \end{pmatrix}. \quad z(P) = 0, \quad \nabla z = (3x^2y, x^3 - 2ye^w, -y^2e^w),$$

$\nabla z(P) = (3, -1, -1)$. Equazione del piano tangente:

$$z = 3(x - 1) - (y - 1) - w, \text{ oppure } 3x - y - w - z = 2.$$

Compito F2

1) (6 punti) Sia dato l'insieme $C =] - 3\pi, 3\pi[\cup] - 20, 1[$. Indicare se l'insieme C è aperto, chiuso o né aperto, né chiuso; e determinare:

i. $MI(C)$, l'insieme dei minoranti dell'insieme C ;

ii. $Sup(C)$, l'estremo superiore dell'insieme C .

1) Da $3 < \pi < 4$ deriva $9 < 3\pi < 12$ quindi $C =] - 3\pi, 3\pi[\cup] - 20, 1[=] - 20, 3\pi[$; C è un insieme aperto in quanto unione fra due intervalli aperti.

$$MI(C) =] - \infty, -20] \text{ e } Sup(C) = 3\pi.$$

2) (6 punti) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x^3}$.

2) La funzione proposta è una funzione irrazionale di indice pari, quindi il suo campo d'esistenza è ottenuto ponendo il suo radicando maggiore o uguale a zero;

$$x^2 - x^3 \geq 0 \text{ equivale a } x^2(1 - x) \geq 0 \text{ vera se } 1 - x \geq 0 \text{ ovvero } x \leq 1.$$

$$C.E. =] - \infty, 1].$$

3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = \lg(kx) - \log(1 + 2x)$, con k parametro reale

diverso da 0; se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{5}$, quale è il valore del parametro k ?

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(kx) - \log(1 + 2x)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(kx)}{kx} \cdot k - \frac{\log(1 + 2x)}{2x} \cdot 2 = (\rightarrow 1) \cdot k - (\rightarrow 1) \cdot 2 = k - 2. \text{ Posto}$$

$$k - 2 = \frac{1}{5} \text{ si ottiene facilmente } k = \frac{11}{5}.$$

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x^4 + x^2)}{5x^2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3e^{-x}}{5 + 2e^x}$.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x^4 + x^2)}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x^4 + x^2)}{x^4 + x^2} \cdot \frac{x^2 + 1}{5} =$$

$$(\rightarrow 1) \cdot \left(\rightarrow \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5}.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x^4 + x^2)}{5x^2} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Appliciamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x^4 + x^2)}{5x^2} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x^4+x^2)^2}} \cdot (4x^3 + 2x)}{10x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x^4+x^2)^2}} \cdot 2x \cdot (2x^2 + 1)}{10x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x^4+x^2)^2}} \cdot (2x^2 + 1)}{5} =$$

$$\frac{(\rightarrow 1) \cdot (\rightarrow 1)}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3e^{-x}}{5 + 2e^x} = \frac{4 - (\rightarrow + \infty)}{5 + (\rightarrow 0)} = \frac{(\rightarrow - \infty)}{(\rightarrow 5)} = -\infty.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = \frac{e^{-x}}{1+x}.$$

5) $C.E.: 1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1, C.E. =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$

Segno ed intersezioni con gli assi: $\frac{e^{-x}}{1+x} > 0$ se $1+x > 0 \Rightarrow x > -1$. Funzione negativa in $]-\infty, -1[$, positiva in $]-1, +\infty[; y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} = -\infty \text{ in quanto per } x \rightarrow -\infty, 1+x = o(e^{-x}).$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} = \frac{(\rightarrow +\infty)}{(\rightarrow -\infty)}$ FI . Appliciamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x+x^2} = +\infty$ in quanto per $x \rightarrow -\infty, x+x^2 = o(e^{-x})$. A sinistra la funzione non presenta asintoti.

$$\lim_{x \rightarrow -1^{\pm}} \frac{e^{-x}}{1+x} = \frac{(\rightarrow e)}{(\rightarrow 0^{\pm})} = \pm \infty; AsV \text{ di equazione } x = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow +\infty)} = 0; AsOrDx \text{ di equazione } y = 0.$$

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{-e^{-x}(1+x) - e^{-x}}{(1+x)^2} = \frac{-e^{-x}(2+x)}{(1+x)^2}$. $y' > 0$ se

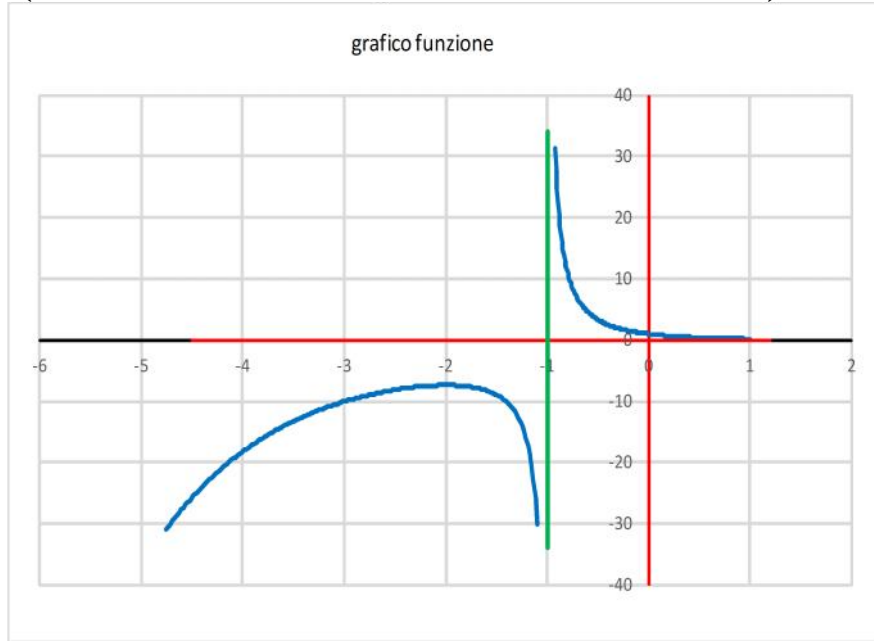
$2+x < 0 \Rightarrow x < -2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -2[$, strettamente decrescente sia in $[-2, -1[$ che in $]-1, +\infty[$, punto di massimo relativo $A(-2, -e^2)$.

Concavità e convessità:

$$y'' = \frac{(e^{-x}(2+x) - e^{-x})(1+x)^2 + e^{-x}(2+x) \cdot 2 \cdot (1+x)}{(1+x)^4} = \frac{e^{-x}(1+x)((1+x)^2 + 2(2+x))}{(1+x)^4} = \frac{e^{-x}(1+x)(1+(2+x)^2)}{(1+x)^4} \cdot y'' > 0 \text{ se}$$

$1+x > 0 \Rightarrow x > -1$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, -1[$, strettamente convessa in $]-1, +\infty[$, la funzione non presenta punti di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto verticale, in rosso l'asintoto orizzontale):



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_{-2}^1 (\sqrt[5]{x} + e^{2x}) dx$.

$$6) \int_{-2}^1 (\sqrt[5]{x} + e^{2x}) dx = \int_{-2}^1 \left(x^{\frac{1}{5}} + e^{2x} \right) dx = \left(\frac{5}{6} \cdot x^{\frac{6}{5}} + \frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$\left(\frac{5}{6} \cdot 1^{\frac{6}{5}} + \frac{e^2}{2} \right) - \left(\frac{5}{6} \cdot (-2)^{\frac{6}{5}} + \frac{e^{-4}}{2} \right) = \left(\frac{5}{6} + \frac{e^2}{2} \right) - \left(\frac{5}{3} \sqrt[5]{2} + \frac{e^{-4}}{2} \right) =$$

$$\frac{5}{6} (1 - 2\sqrt[5]{2}) + \frac{e^2 - e^{-4}}{2} \approx 2.6.$$

7) (7 punti) Verificare che alla funzione $f(x) = 4x - 2^x$ è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 3]$ e determinare l'unico valore x_0 che soddisfa il Teorema.

7) La funzione $f(x)$ è continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile nell'intervallo $[1, 3]$, il Teorema è applicabile. $f(3) = 4 \cdot 3 - 2^3 = 4$,

$$f(1) = 4 \cdot 1 - 2 = 2, \quad \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1; \quad f'(x) = 4 - 2^x \cdot \log 2. \text{ Posto}$$

$$4 - 2^x \cdot \log 2 = 1 \text{ otteniamo } 2^x \cdot \log 2 = 3 \text{ da cui } 2^x = \frac{3}{\log 2} \text{ ed infine}$$

$$x = \log_2 \left(\frac{3}{\log 2} \right). \quad x_0 = \log_2 \left(\frac{3}{\log 2} \right) \approx 2.11.$$

8) (8 punti) Sia data la funzione $z(x, y, w) = 3x^2y + x \log w$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $P(1, 0, 1)$.

8) Il piano tangente al grafico della funzione ha equazione

$$z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ w - w_P \end{pmatrix}. \quad z(P) = 0, \quad \nabla z = \left(6xy + \log w, 3x^2, \frac{x}{w} \right),$$

$$\nabla z(P) = (0, 3, 1). \text{ Equazione del piano tangente: } z = 0(x - 1) + 3y + (w - 1),$$

oppure $3y + w - z = 1$.

- 1) (6 punti) Sia dato l'insieme $C = [-2e, 2e] \cup]0, 15[$. Indicare se l'insieme C è aperto, chiuso o né aperto, né chiuso; e determinare:
- $MA(C)$, l'insieme dei maggioranti dell'insieme C ;
 - $Inf(C)$, l'estremo inferiore dell'insieme C .
- 1) Da $2 < e < 3$ deriva $4 < 2e < 6$ quindi $C = [-2e, 2e] \cup]0, 15[= [-2e, 15[$, intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra; C è un insieme né aperto, né chiuso.
 $MA(C) = [15, +\infty[$ e $Inf(C) = -2e$.
- 2) (6 punti) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt[6]{4x^3 - x^2}$.
- 2) La funzione proposta è una funzione irrazionale di indice pari, quindi il suo campo d'esistenza è ottenuto ponendo il suo radicando maggiore o uguale a zero;
 $4x^3 - x^2 \geq 0$ equivale a $x^2(4x - 1) \geq 0$ vera se $x = 0$ oppure $4x - 1 \geq 0$ ovvero $x \geq \frac{1}{4}$. $C.E. = \{0\} \cup [\frac{1}{4}, +\infty[$.
- 3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = tg(kx) - sen(2x)$, con k parametro reale diverso da 0; se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$, quale è il valore del parametro k ?
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(kx) - sen(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(kx)}{kx} \cdot k - \frac{sen(2x)}{2x} \cdot 2 =$
 $(\rightarrow 1) \cdot k - (\rightarrow 1) \cdot 2 = k - 2$. Posto $k - 2 = \frac{1}{3}$ si ottiene facilmente $k = \frac{7}{3}$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{arcsen(3x^3 - x^2)}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^{-x}}{5 - 3e^{-x}}$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{arcsen(3x^3 - x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{arcsen(3x^3 - x^2)}{3x^3 - x^2} \cdot (3x - 1) =$
 $(\rightarrow 1) \cdot (\rightarrow -1) = -1$.
 Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{arcsen(3x^3 - x^2)}{x^2} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{arcsen(3x^3 - x^2)}{x^2} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(3x^3-x^2)^2}} \cdot (9x^2 - 2x)}{\frac{1}{\sqrt{1-(3x^3-x^2)^2}} \cdot \cancel{2x} \cdot (9x - 2)} =$$
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2x}}{2\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(9x^2-2)^2}} \cdot (9x^2 - 2)}{2} =$$
- $$\frac{(\rightarrow 1) \cdot (\rightarrow -2)}{2} = -1.$$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^{-x}}{5 - 3e^{-x}} = \frac{(\rightarrow +\infty)}{(\rightarrow -\infty)}$ FI. Raccogliamo al denominatore la quantità e^{-x} :
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^{-x}}{5 - 3e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^{\cancel{x}}}{e^{\cancel{x}}(5e^x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{5e^x - 3} =$$
- $$\frac{4}{(\rightarrow -3)} = -\frac{4}{3}.$$
- Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^{-x}}{5 - 3e^{-x}} = \frac{(\rightarrow +\infty)}{(\rightarrow -\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^{-x}}{5 - 3e^{-x}} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4e^{-x}}{3e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}.$$
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione
- $$y = \frac{e^{-x}}{4 - x}.$$

5) $C.E.: 4 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4, C.E. =] - \infty, 4[\cup]4, + \infty[.$

Segno ed intersezioni con gli assi: $\frac{e^{-x}}{4-x} > 0$ se $4-x > 0 \Rightarrow x < 4$. Funzione positiva in $] - \infty, 4[$, negativa in $]4, + \infty[$; $y(0) = \frac{1}{4}$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{4-x} = +\infty \text{ in quanto per } x \rightarrow -\infty, 4-x = o(e^{-x}).$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{4-x} = \frac{(-\infty)}{(-\infty)}$ FI . Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{4-x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{4-x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{4x-x^2} = -\infty \text{ in quanto per } x \rightarrow -\infty, 4x-x^2 = o(e^{-x}). \text{ A sinistra la funzione non presenta asintoti.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{e^{-x}}{4-x} = \frac{(\rightarrow e^{-4})}{(\rightarrow 0^\mp)} = \mp \infty; \text{ AsV di equazione } x = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{4-x} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow -\infty)} = 0; \text{ AsOrDx di equazione } y = 0.$$

$$\text{Crescenza e decrescenza: } y' = \frac{-e^{-x}(4-x) - e^{-x}(-1)}{(4-x)^2} = \frac{e^{-x}(x-3)}{(4-x)^2} \cdot y' > 0$$

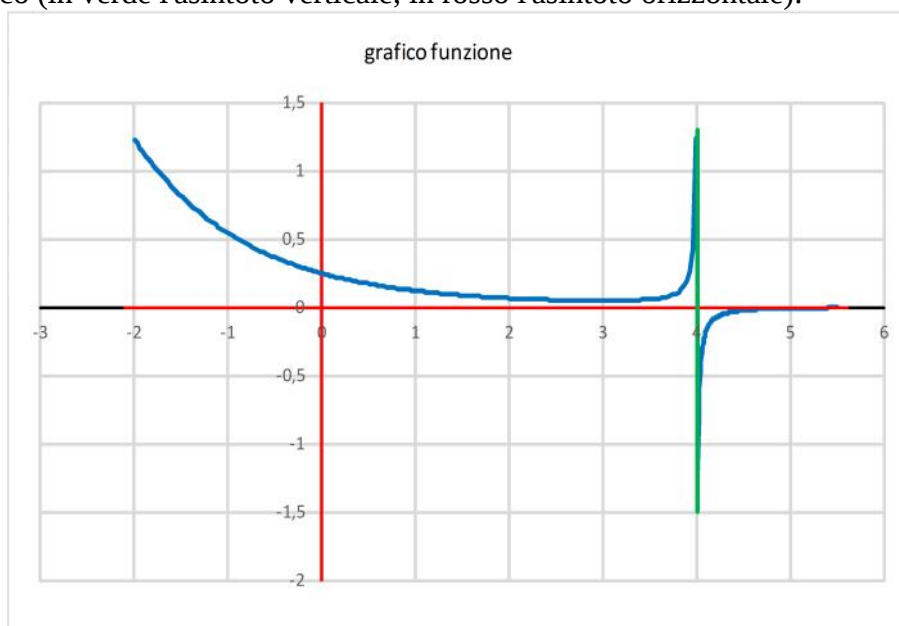
se $x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$. Funzione strettamente decrescente in $] - \infty, 3[$, strettamente crescente sia in $[3, 4[$ che in $]4, + \infty[$, punto di minimo relativo $A(3, e^{-3})$.

Concavità e convessità:

$$y'' = \frac{(-e^{-x}(x-3) + e^{-x})(4-x)^2 - e^{-x}(3-x) \cdot 2 \cdot (4-x) \cdot (-1)}{(4-x)^4} = \frac{e^{-x}(4-x)((4-x)^2 + 2(x-3))}{(4-x)^4} = \frac{e^{-x}(4-x)(1+(x-3)^2)}{(4-x)^4} \cdot y'' > 0 \text{ se}$$

$4-x > 0 \Rightarrow x < 4$. Funzione strettamente convessa in $] - \infty, 4[$, strettamente concava in $]4, + \infty[$, la funzione non presenta punti di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto verticale, in rosso l'asintoto orizzontale):



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} - e^{3x}) dx$.

$$6) \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} - e^{3x}) dx = \int_{-1}^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - e^{3x} \right) dx = \left(\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} - \frac{e^{3x}}{3} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot 1^{\frac{4}{3}} - \frac{e^3}{3} \right) - \left(\frac{3}{4} \cdot (-1)^{\frac{4}{3}} - \frac{e^{-3}}{3} \right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{e^3}{3} \right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{e^{-3}}{3} \right) =$$

$$\frac{e^{-3} - e^3}{3} \approx -6.68.$$

7) (7 punti) Verificare che alla funzione $f(x) = 3x + 3^x$ è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 3]$ e determinare l'unico valore x_0 che soddisfa il Teorema.

7) La funzione $f(x)$ è continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile nell'intervallo $[1, 3]$, il Teorema è applicabile. $f(3) = 3 \cdot 3 + 3^3 = 36$, $f(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 6$, $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 6}{2} = 15$; $f'(x) = 3 + 3^x \cdot \log 3$. Posto

$$3 + 3^x \cdot \log 3 = 15 \text{ otteniamo } 3^x \cdot \log 3 = 12 \text{ da cui } 3^x = \frac{12}{\log 3} \text{ ed infine}$$

$$x = \log_3 \left(\frac{12}{\log 3} \right). \quad x_0 = \log_3 \left(\frac{12}{\log 3} \right) \approx 2.18.$$

8) (8 punti) Sia data la funzione $z(x, y, w) = x^2 y w + y^3 w$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $P(0, 1, 2)$.

8) Il piano tangente al grafico della funzione ha equazione

$$z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ w - w_P \end{pmatrix}. \quad z(P) = 2,$$

$$\nabla z = (2xyw, x^2w + 3y^2w, x^2y + y^3), \quad \nabla z(P) = (0, 6, 1). \text{ Equazione del piano tangente: } z - 2 = 0 \cdot x + 6(y - 1) + (w - 2), \text{ oppure } 6y + w - z = 6.$$

Compito F4

1) (6 punti) Sia dato l'insieme $C =] - 3e, 3[\cap [- 1, 3e]$. Indicare se l'insieme C è aperto, chiuso o né aperto, né chiuso; e determinare:

i. $MI(C)$, l'insieme dei minoranti dell'insieme C ;

ii. $Inf(C)$, l'estremo inferiore dell'insieme C .

1) Da $2 < e < 3$ deriva $6 < 3e < 9$ quindi $C =] - 3e, 3[\cap [- 1, 3e] = [- 1, 3[$, intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra; C è un insieme né aperto, né chiuso. $MI(C) =] - \infty, -1]$ e $Inf(C) = -1$.

2) (6 punti) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt[6]{x^4 - 9x^2}$.

2) La funzione proposta è una funzione irrazionale di indice pari, quindi il suo campo d'esistenza è ottenuto ponendo il suo radicando maggiore o uguale a zero;

$$x^4 - 9x^2 \geq 0 \text{ equivale a } x^2(x^2 - 9) \geq 0 \text{ vera se } x = 0 \text{ oppure } x^2 - 9 \geq 0 \text{ ovvero}$$

$$x^2 \geq 9 \text{ che è verificata per } x \leq -3 \vee x \geq 3.$$

$$C.E. =] - \infty, -3] \cup \{0\} \cup [3, +\infty[.$$

3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = \log(1 + kx) + tg(-2x)$, con k parametro

reale diverso da 0; se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, quale è il valore del parametro k ?

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + kx) + tg(-2x)}{x} =$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+kx)}{kx} \cdot k - \frac{\operatorname{tg}(-2x)}{-2x} \cdot 2 = (\rightarrow 1) \cdot k - (\rightarrow 1) \cdot 2 = k - 2$. Posto $k - 2 = 3$ si ottiene facilmente $k = 5$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4 + x^2)}{\operatorname{tg}(x^2)}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{5 + 2e^{-x}}$.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4 + x^2)}{\operatorname{tg}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x^4 + x^2)}{x^4 + x^2}}{\frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2}} \cdot (x^2 + 1) = \frac{(\rightarrow 1)}{(\rightarrow 1)} \cdot (\rightarrow 1) = 1.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4 + x^2)}{\operatorname{tg}(x^2)} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4 + x^2)}{\operatorname{tg}(x^2)} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^4 + x^2) \cdot (4x^3 + 2x)}{(1 + \operatorname{tg}^2(x^2)) \cdot 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^4 + x^2) \cdot \cancel{2x} \cdot (2x^2 + 1)}{(1 + \operatorname{tg}^2(x^2)) \cdot \cancel{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^4 + x^2) \cdot (2x^2 + 1)}{1 + \operatorname{tg}^2(x^2)} =$$

$$\frac{(\rightarrow 1) \cdot (\rightarrow 1)}{(\rightarrow 1)} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{5 + 2e^{-x}} = \frac{1 - (\rightarrow 0)}{5 + (\rightarrow 0)} = \frac{1}{5}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = \frac{e^x}{2 - x}.$$

5) C.E.: $2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, C.E. = $] - \infty, 2[\cup]2, + \infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\frac{e^x}{2 - x} > 0$ se $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$. Funzione

positiva in $] - \infty, 2[$, negativa in $]2, + \infty[$; $y(0) = \frac{1}{2}$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$x \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2 - x} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow +\infty)} = 0; \text{ AsOrSx di equazione } y = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{e^x}{2 - x} = \frac{(\rightarrow e^2)}{(\rightarrow 0^\mp)} = \mp \infty; \text{ AsV di equazione } x = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 - x} = -\infty \text{ in quanto per } x \rightarrow +\infty, 2 - x = o(e^x).$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 - x} = \frac{(\rightarrow +\infty)}{(\rightarrow -\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 - x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{-1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 - x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x - x^2} = -\infty \text{ in quanto per } x \rightarrow +\infty, 2x - x^2 = o(e^x). \text{ A destra la funzione non presenta asintoti.}$$

$$\text{Crescenza e decrescenza: } y' = \frac{e^x(2 - x) - e^x(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{e^x(3 - x)}{(2 - x)^2}. y' > 0 \text{ se}$$

$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$. Funzione strettamente crescente sia in $] - \infty, 2[$ che in $]2, 3[$, strettamente decrescente in $[3, + \infty[$, punto di massimo relativo $A(3, -e^3)$.

Concavità e convessità:

$$y'' = \frac{(e^x(3-x) - e^x)(2-x)^2 - e^x(3-x) \cdot 2 \cdot (2-x) \cdot (-1)}{(2-x)^4} =$$

$$\frac{e^x(2-x)((2-x)^2 + 2(3-x))}{(2-x)^4} = \frac{e^x(2-x)(1+(3-x)^2)}{(2-x)^4} \cdot y'' > 0 \text{ se}$$

$2-x > 0 \Rightarrow x < 2$. Funzione strettamente convessa in $] -\infty, 2[$, strettamente concava in $]2, +\infty[$, la funzione non presenta punti di flesso.

Grafico (in verde l'asintoto verticale, in rosso l'asintoto orizzontale):



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_{-1}^2 (\sqrt[3]{3x} + e^x) dx$.

$$6) \int_{-1}^2 (\sqrt[3]{3x} + e^x) dx = \int_{-1}^2 (\sqrt[3]{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} + e^x) dx = \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{3} \cdot x^{\frac{4}{3}} + e^x \right)_{-1}^2 =$$

$$\left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{3} \cdot 2^{\frac{4}{3}} + e^2 \right) - \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{3} \cdot (-1)^{\frac{4}{3}} + e^{-1} \right) =$$

$$\left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{6} + e^2 \right) - \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{3} + e^{-1} \right) = \frac{3}{4} (2\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3}) + e^2 - e^{-1} \approx 8.67.$$

Soluzione alternativa (integrazione per sostituzione): posto $3x = t$, risulta $x = \frac{1}{3}t$

$$\text{con } dx = \frac{1}{3}dt \text{ e quindi } \int_{-1}^2 (\sqrt[3]{3x} + e^x) dx = \int_{-3}^6 (\sqrt[3]{t} + e^{\frac{1}{3}t}) \frac{1}{3}dt =$$

$$\int_{-3}^6 \left(t^{\frac{1}{3}} + e^{\frac{1}{3}t} \right) \frac{1}{3}dt = \left(\frac{1}{4} \cdot t^{\frac{4}{3}} + e^{\frac{1}{3}t} \right)_{-3}^6 =$$

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 6^{\frac{4}{3}} + e^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^{\frac{4}{3}} + e^{-1} \right) = \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{6} + e^2 \right) - \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{3} + e^{-1} \right) =$$

$$\frac{3}{4} (2\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3}) + e^2 - e^{-1} \approx 8.67.$$

7) (7 punti) Verificare che alla funzione $f(x) = x - 5^x$ è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 2]$ e determinare l'unico valore x_0 che soddisfa il Teorema.

7) La funzione $f(x)$ è continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile nell'intervallo $[1, 2]$, il Teorema è applicabile. $f(2) = 2 - 5^2 = -23$,

$$f(1) = 1 - 5 = -4, \quad \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{-23 + 4}{1} = -19; \quad f'(x) = 1 - 5^x \cdot \log 5.$$

Posto $1 - 5^x \cdot \log 5 = -19$ otteniamo $5^x \cdot \log 5 = 20$ da cui $5^x = \frac{20}{\log 5}$ ed infine

$$x = \log_5 \left(\frac{20}{\log 5} \right). \quad x_0 = \log_5 \left(\frac{20}{\log 5} \right) \approx 1.57.$$

8) (8 punti) Sia data la funzione $z(x, y, w) = x \log w - 3xy^2 + 2$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $P(0, 2, 1)$.

8) Il piano tangente al grafico della funzione ha equazione

$$z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ w - w_P \end{pmatrix}. \quad z(P) = 2, \quad \nabla z = \left(\log w - 3y^2, -6xy, \frac{x}{w} \right),$$

$\nabla z(P) = (-12, 0, 0)$. Equazione del piano tangente:

$$z - 2 = -12x + 0(y - 2) + 0(w - 1), \text{ oppure } 12x + z = 2.$$