Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2024-25)

18 marzo 2026

Compito $\mathbb{M}$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la verità o falsità delle tre proposizioni semplici sapendo che le proposizioni composte $p \Rightarrow \neg q$, e $(p\ e\ q) \Leftrightarrow \neg r$ sono entrambe false.

1) *Primo Metodo, tramite la Tavola di Verità*:

p	q	r	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$p\ e\ q$	$\neg r$	$(p\ e\ q) \Leftrightarrow \neg r$
V	***V***	***V***	***F***	***F***	***V***	***F***	***F***
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V			
V	F	F	V	V			
F	V	V	F	V			
F	V	F	F	V			
F	F	V	V	V			
F	F	F	V	V			

.

Consideriamo solo la riga dove le due proposizioni composte $p \Rightarrow \neg q$, e $(p\ e\ q) \Leftrightarrow \neg r$ sono entrambe false (riga in grassetto), come facilmente si evince le tre proposizioni semplici p, q e r sono tutte vere.

Secondo Metodo, con il Ragionamento Logico: se la proposizione $p \Rightarrow \neg q$ è falsa, p è vera e $\neg q$ è falsa, quindi q è vera, di conseguenza anche $p\ e\ q$ è vera; se la proposizione $(p\ e\ q) \Leftrightarrow \neg r$ è falsa, dalla verità di $p\ e\ q$ otteniamo che $\neg r$ è falsa e quindi r è vera. In conclusione p, q e r sono tutte vere.

2) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = x^3$, sapendo che la funzione composta $g(f(x))$ ha espressione $g(f(x)) = x^3 \cdot 2^{x^3}$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$, della funzione composta $f(g(x))$ e della ulteriore funzione composta $g(f(g(x)))$.

2) Da $f(x) = x^3$ e $g(f(x)) = x^3 \cdot 2^{x^3}$ otteniamo facilmente che $g(x) = x \cdot 2^x$, per le altre due funzioni composte abbiamo $f(g(x)) = f(x \cdot 2^x) = (x \cdot 2^x)^3 = x^3 \cdot 2^{3x} = x^3 \cdot 8^x$ e $g(f(g(x))) = g(x^3 \cdot 2^{3x}) = x^3 \cdot 2^{3x} \cdot 2^{x^3 \cdot 2^{3x}} = x^3 \cdot 2^{3x + x^3 \cdot 2^{3x}} = x^3 \cdot 2^{3x + x^3 \cdot 8^x}$.

3) (7 punti) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim\limits_{x \to +\infty} log\sqrt{x-2}$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} log\sqrt{x-2} = log(\to +\infty) = +\infty$. Verifica: posto $log\sqrt{x-2} > \epsilon$ si ha $\sqrt{x-2} > e^{\epsilon}$ da cui segue $x - 2 > e^{2\epsilon}$ ed in conclusione $x > 2 + e^{2\epsilon}$; limite verificato con $\delta_\epsilon = 2 + e^{2\epsilon} > 0$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(e^{2x^2} - 1)}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(e^{2x^2} - 1)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(e^{2x^2} - 1)}{e^{2x^2} - 1} \cdot \dfrac{e^{2x^2} - 1}{2x^2} \cdot 2 =$
$(\to 1) \cdot (\to 1) \cdot 2 = 2.$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{sen(e^{2x^2}-1)}{x^2} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(e^{2x^2}-1)}{x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{cos(e^{2x^2}-1) \cdot e^{2x^2} \cdot \cancel{4x}^{2}}{\cancel{2x}} =$$

$$\lim_{x \to 0} cos(e^{2x^2}-1) \cdot e^{2x^2} \cdot 2 = (\to 1) \cdot (\to 1) \cdot 2 = 2.$$

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Razionalizziamo il numeratore:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{1}{2}.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital. Applichiamo il Teorema: $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{1} =$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2}.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = x^2 \cdot e^{1+x}$.

5) *C.E.*: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = (-x)^2 \cdot e^{1+(-x)} = x^2 \cdot e^{1-x}$. $y(-x)$ è funzione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$, funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $x^2 \cdot e^{1+x} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Funzione non negativa su tutto l'insieme $\mathbb{R}$; $y(0) = 0$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{1+x} = (\to +\infty) \cdot (\to 0)$ FI; il limite può essere risolto riscrivendolo nel modo seguente: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-(1+x)}} = 0$ in quanto per $x \to -\infty$, $x^2 = o\left(e^{-(1+x)}\right)$; $AsOrSx$ di equazione $y = 0$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{1+x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-(1+x)}} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI.

Applichiamo il Teorema: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-(1+x)}} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-(1+x)}} = \frac{(\to -\infty)}{(\to -\infty)}$

FI. Applichiamo nuovamente il Teorema:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-(1+x)}} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-(1+x)}} = \frac{2}{(\to +\infty)} = 0.$$

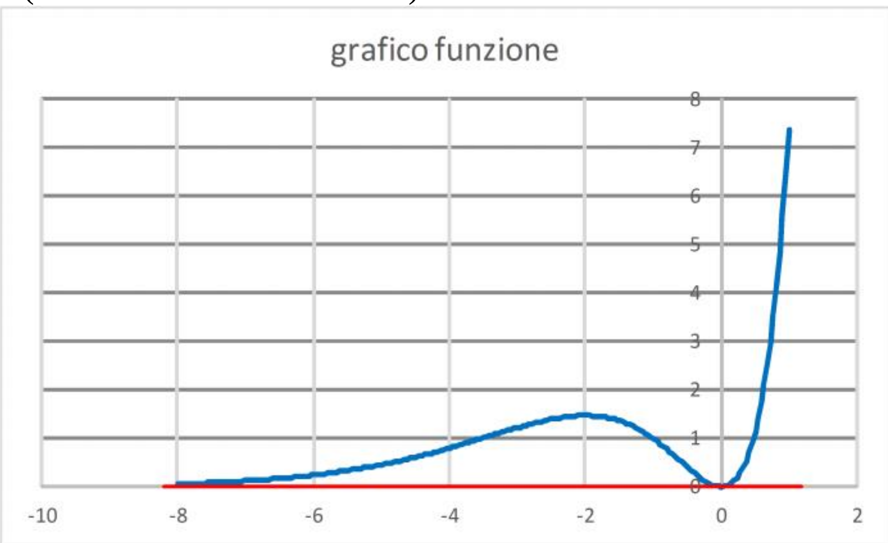
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{1+x} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}} \cdot e^{1+x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{1+x} =$$

$(\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$. A destra la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2x \cdot e^{1+x} + x^2 \cdot e^{1+x} = x(2+x)e^{1+x}$. $y' > 0$ se $x(2+x) > 0$ che risulta verificata per $x < -2 \vee x > 0$. Funzione strettamente crescente sia in $]-\infty, -2]$ che in $[0, +\infty[$, strettamente decrescente in $[-2, 0]$,

punto di massimo relativo in $x = -2$, con $y(-2) = \frac{4}{e}$; minimo assoluto in $O(0,0)$.
Concavità e convessità: $y'' = 1 \cdot (2+x)e^{1+x} + x \cdot 1 \cdot e^{1+x} + x(2+x)e^{1+x} = (x^2+4x+2)e^{1+x}$. $y'' > 0$ se $x^2+4x+2 > 0$, risolviamo la disequazione di secondo grado: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8,\ x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$, $y'' > 0$ se $x < -2-\sqrt{2} \vee x > -2+\sqrt{2}$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, -2-\sqrt{2}]$ e in $[-2+\sqrt{2}, +\infty[$, strettamente concava in $[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$, due punti di flesso di ascissa $x = -2 \pm \sqrt{2}$, con ordinata $y\left(-2 \pm \sqrt{2}\right) = 2\left(3 \mp 2\sqrt{2}\right)e^{-1 \pm \sqrt{2}}$.
Grafico (in rosso l'asintoto orizzontale):



.

6) (8 punti) Calcolare $\int_2^3 (x+1)(3-x)\,dx$.

6) $\int_2^3 (x+1)(3-x)\,dx = \int_2^3 (3+2x-x^2)\,dx = \left(3x + x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)_2^3 = (9+9-9) - \left(6+4-\frac{8}{3}\right) = 9 - \frac{22}{3} = \frac{5}{3}$.

Soluzione alternativa (integrazione per parti):

$\int_2^3 (x+1)(3-x)\,dx = \left(\frac{1}{2}(x+1)^2(3-x)\right)_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{2}(x+1)^2(-1)\,dx = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 1 + \int_2^3 \frac{1}{2}(x+1)^2\,dx = -\frac{9}{2} + \left(\frac{1}{6}(x+1)^3\right)_2^3 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{6} \cdot 64 - \frac{1}{6} \cdot 27 = -\frac{9}{2} + \frac{32}{3} - \frac{9}{2} = \frac{32}{3} - 9 = \frac{5}{3}$.

7) (6 punti) Siano date le matrici $\mathbb{M} = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ e $\mathbb{N} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$; indicare il valore di k per cui risulta $\mathbb{N} \cdot \mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

7) $\mathbb{N} \cdot \mathbb{M} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot k + 0 \cdot 1 & k \cdot 1 + 0 \cdot k \\ 0 \cdot k + k \cdot 1 & 0 \cdot 1 + k \cdot k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 & k \\ k & k^2 \end{bmatrix}$; posto $\begin{bmatrix} k^2 & k \\ k & k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ otteniamo facilmente $k = -1$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione
$f(x, y, z, w) = \dfrac{x^3 + y^2}{z} - \dfrac{w^2}{y^3}$.

8) $f'_x = \dfrac{3x^2}{z}$; $\qquad f'_y = \dfrac{2y}{z} + \dfrac{3y^2 w^2}{y^6} = \dfrac{2y}{z} + \dfrac{3w^2}{y^4}$;

$f'_z = -\dfrac{x^3 + y^2}{z^2}$; $\qquad f'_w = -\dfrac{2w}{y^3}$.