Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

4 giugno 2026

Compito $\mathbb{G}7$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, determinare se la proposizione semplice q risulta vera o falsa, sapendo che la proposizione composta $\neg(p\ o\ q) \Rightarrow (q\ e\ r)$ è falsa.

1) *Primo Metodo - con la Tavola di Verità*: costruiamo la tavola di verità della proposizione composta $\neg(p\ o\ q) \Rightarrow (q\ e\ r)$:

p	q	r	$p\ o\ q$	$\neg(p\ o\ q)$	$q\ e\ r$	$\neg(p\ o\ q) \Rightarrow (q\ e\ r)$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

.

Come si evince dalle ultime due righe della tavola (in neretto), le uniche in cui la proposizione composta è falsa, la proposizione semplice q risulta falsa.

Secondo Metodo - con il Ragionamento Logico: se la proposizione composta $\neg(p\ o\ q) \Rightarrow (q\ e\ r)$ è falsa, la proposizione $\neg(p\ o\ q)$ è necessariamente vera, quindi $p\ o\ q$ è falsa e di conseguenza la proposizione q risulta falsa, notiamo che nel caso proposto anche la proposizione p risulta necessariamente falsa.

2) (7 punti) Siano dati i tre insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 7\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}: 4 \leq x \leq 12\}$. Calcolare gli insiemi: $D = A \cup (B \cap C)$ e $E = A \cap \mathcal{C}(B \cup C)$. Per ognuno degli insiemi D ed E indicare se si tratta di insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo il complementare dell'insieme X)

2) Scriviamo gli insiemi A, B e C in termini di intervalli: $A = [0,12]$, $B =]2,7[$ e $C = [4,12]$. $B \cap C =]2,7[\cap [4,12] = [4,7[\subset A$, quindi $D = A \cup (B \cap C) = A$ insieme chiuso; $B \cup C =]2,7[\cup [4,12] =]2,12]$, con $\mathcal{C}(B \cup C) = \mathcal{C}(]2,12]) =]-\infty,2] \cup]12,+\infty[$, quindi $E = A \cap \mathcal{C}(B \cup C) = [0,12] \cap (]-\infty,2] \cup]12,+\infty[) = [0,2]$ insieme chiuso.

3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = (1+2kx)e^x$, dove k è un parametro reale positivo. Determinare il valore di k tale per cui la funzione f presenta un punto di minimo assoluto di ascissa pari a -2.

3) Calcoliamo la derivata della funzione f, $f'(x) = 2k \cdot e^x + (1+2kx) \cdot e^x = (1+2k+2kx)e^x$; posto $(1+2k+2kx)e^x \geq 0$ si ottiene $1+2k+2kx \geq 0$ ovvero $2kx \geq -(1+2k)$ che ha soluzione $x \geq -\dfrac{1+2k}{2k}$ (k positivo). Funzione decrescente per $x \leq -\dfrac{1+2k}{2k}$, crescente per $x \geq -\dfrac{1+2k}{2k}$, di conseguenza la funzione, continua e definita su tutto $\mathbb{R}$,

presenta punto di minimo assoluto di ascissa $x = -\frac{1+2k}{2k}$. Posto $-\frac{1+2k}{2k} = -2$ si ottiene $\frac{1}{2k} = 1$ ovvero $2k = 1$ da cui $k = \frac{1}{2}$.

Soluzione Alternativa: la funzione proposta è derivabile due volte su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, se essa presenta un punto di minimo assoluto di ascissa pari a -2, la sua derivata nel punto deve risultare uguale a zero; $f'(x) = (1+2k+2kx)e^x$ con $f'(-2) = (1-2k)e^{-2}$, posto $(1-2k)e^{-2} = 0$ otteniamo facilmente $k = \frac{1}{2}$. Per verificare che il punto di ascissa -2 è punto di minimo assoluto dobbiamo accertare che $f''(-2) > 0$; calcoliamo la derivata seconda:
$f''(x) = 1 \cdot e^x + (2+x) \cdot e^x = (3+x)e^x$ con $f''(-2) = e^{-2} > 0$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x^2}{arcsen\, 3x^2}$; $\lim_{x \to +\infty} log\, x^3 \cdot \left(2 - log\, x^3\right)$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x^2}{arcsen\, 3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{sen\, x^2}{x^2}}{\frac{arcsen\, 3x^2}{3x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\to 1)}{(\to 1)} = \frac{1}{3}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x^2}{arcsen\, 3x^2} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x^2}{arcsen\, 3x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x^2 \cdot 2\cancel{x}}{\sqrt{\frac{1}{1-9x^4}} \cdot 6\cancel{x}^3} = \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x^2}{\sqrt{\frac{1}{1-9x^4}} \cdot 3} = \frac{(\to 1)}{(\to 1) \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Per il secondo limite notiamo che $\lim_{x \to +\infty} log\, x^3 = +\infty$, pertanto $\lim_{x \to +\infty} log\, x^3 \cdot \left(2 - log\, x^3\right) = (\to +\infty) \cdot (\to -\infty) = -\infty$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{2x} - e^{-3x}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{2(-x)} - e^{-3(-x)} = e^{-2x} - e^{3x}$, espressione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$. Funzione né pari, né dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $e^{2x} - e^{-3x} > 0$ se $e^{2x} > e^{-3x} \Rightarrow 2x > -3x$ vera per $x > 0$. Funzione negativa in $]-\infty, 0[$, positiva in $]0, +\infty[$;
$y(0) = e^0 - e^0 = 0$. Unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^{-3x} = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty$.
$\lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to -\infty$ sia e^{2x} che x sono $o(e^{-3x})$, pertanto $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{o(e^{-3x}) - e^{-3x}}{o(e^{-3x})} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{e^{-3x}}{o(e^{-3x})} = +\infty$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} = \frac{(\to -\infty)}{(\to -\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^{2x} + 3e^{-3x}}{1} = (\to 0) + (\to +\infty) = +\infty.$

$\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - e^{-3x} = (\to +\infty) - (\to 0) = +\infty.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to +\infty$ sia e^{-3x} che x sono $o(e^{2x})$, pertanto $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - o(e^{2x})}{o(e^{2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{o(e^{2x})} = +\infty$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

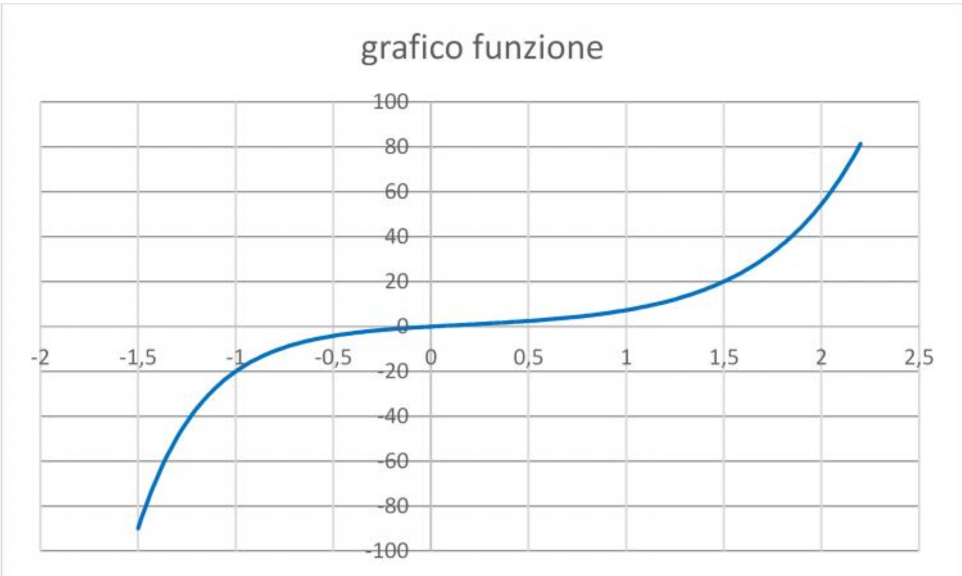
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x} + 3e^{-3x}}{1} = (\to +\infty) + (\to 0) = +\infty.$

La funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2e^{2x} + 3e^{-3x}$. $y' > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Funzione strettamente crescente.

Concavità e convessità: $y'' = 4e^{2x} - 9e^{-3x}$. $y'' > 0$ se $4e^{2x} > 9e^{-3x}$, dividiamo ogni fattore della disequazione per 4 e moltiplichiamo ogni fattore per e^{3x} ottenendo: $e^{5x} > \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5x > log\left(\frac{9}{4}\right)$ ovvero $x > \frac{1}{5} log\left(\frac{9}{4}\right) = log\sqrt[5]{\frac{9}{4}} \approx 0.16$. Funzione concava in $\left]-\infty, log\sqrt[5]{\frac{9}{4}}\right[$, convessa in $\left]log\sqrt[5]{\frac{9}{4}}, +\infty\right[$, punto di flesso di ascissa $log\sqrt[5]{\frac{9}{4}}$ con $y\left(log\sqrt[5]{\frac{9}{4}}\right) = e^{2 \cdot log\sqrt[5]{\frac{9}{4}}} - e^{-3 \cdot log\sqrt[5]{\frac{9}{4}}} = e^{log\sqrt[5]{\frac{81}{16}}} - e^{log\sqrt[5]{\frac{64}{729}}} = \sqrt[5]{\frac{81}{16}} - \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{2}{3}} \approx 0.77$.

Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_1^2 x^2 \cdot \left(3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$.

6) $\int_1^2 x^2 \cdot \left(3 + \frac{1}{x^3}\right)\ dx\ =\ \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)\ dx\ =\ \left(x^3 + log|x|\right)_1^2\ =$
$(8 + log\,2) - (1 + log\,1)\ = 7 + log\,2 \approx 7.69.$

7) (6 punti) Siano dati i vettori $X = (1, 1,\ -1,\ -1)$, $Y = (3, 0,\ -3, 0)$ e $Z = (\alpha, \alpha, \beta, \beta)$. Determinare i valori dei parametri α e β affinché il vettore Z risulti perpendicolare al vettore Y ($Z\ \perp\ Y$), e presenti modulo pari al modulo del vettore X ($\|Z\| = \|X\|$).

7) Il vettore Z risulta perpendicolare al vettore Y se e solo se il prodotto scalare $Z \cdot Y$ è pari a zero con $Z \cdot Y = \alpha \cdot 3 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-3) + \beta \cdot 0 = 3\alpha - 3\beta$. Calcoliamo ora i due moduli: $\|Z\| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2} = \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2}$ e $\|X\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4}$. Per determinare i valori dei parametri α e β richiesti dobbiamo quindi risolvere il sistema: $\begin{cases} 3\alpha - 3\beta = 0 \\ 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \alpha = \beta \\ 4\alpha^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha =\ \pm 1 \\ \beta =\ \pm 1 \end{cases}$. Le uniche coppie di valori che soddisfano le richieste indicate sono $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\alpha =\ -1$, $\beta =\ -1$.

8) (8 punti) Determinare la natura dell'unico punto critico della funzione $f(x,\, y) = 6y^2 + 5x^2 + 2x$.

8) $\nabla f = (10x + 2, 12y)$.

FOC: $\begin{cases} 10x + 2 = 0 \\ 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x =\ -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x =\ -\frac{1}{5} \\ y = 0 \end{cases}$; unico punto critico $P\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P)| = 120 > 0$; $f''_{xx}(P) = 10 > 0$. P punto di minimo.

Compito $\mathbb{G}8$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, determinare se la proposizione semplice q risulta vera o falsa, sapendo che la proposizione composta $(p\ e\ q) \Rightarrow \neg(q\ o\ r)$ è falsa.

1) *Primo Metodo - con la Tavola di Verità*: costruiamo la tavola di verità della proposizione composta $(p\ e\ q) \Rightarrow \neg(q\ o\ r)$:

p	q	r	$p\ e\ q$	$q\ o\ r$	$\neg(q\ o\ r)$	$(p\ e\ q) \Rightarrow \neg(q\ o\ r)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V

.

Come si evince dalle prime due righe della tavola (in neretto), le uniche in cui la proposizione composta è falsa, la proposizione semplice q risulta vera.

Secondo Metodo - con il Ragionamento Logico: se la proposizione composta $(p\ e\ q) \Rightarrow \neg(q\ o\ r)$ è falsa, la proposizione $p\ e\ q$ è necessariamente vera e di conseguenza la proposizione q risulta vera, notiamo che nel caso proposto anche la proposizione p risulta necessariamente vera.

2) (7 punti) Siano dati i tre insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: 8 < x < 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 5 \leq x \leq 7\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}: 5 < x < 12\}$. Calcolare gli insiemi: $D = A \cap (B \cup C)$ e $E = A \cup \mathcal{C}(B \cap C)$. Per ognuno degli insiemi D ed E indicare se si tratta di insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo il complementare dell'insieme X)

2) Scriviamo gli insiemi A, B e C in termini di intervalli: $A =]8,12[$, $B = [5,7]$ e $C =]5,12[$. $B \cup C = [5,7] \cup]5,12[= [5,12[\supset A$, quindi $A \cap (B \cup C) = A$ insieme aperto; $B \cap C = [5,7] \cap]5,12[=]5,7]$, con $\mathcal{C}(B \cap C) = \mathcal{C}(]5,7]) =]-\infty,5] \cup]7,+\infty[$, quindi $E = A \cup \mathcal{C}(B \cap C) =]8,12[\cup (]-\infty,5] \cup]7,+\infty[) =]-\infty,5] \cup]7,+\infty[$ insieme né aperto né chiuso.

3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = (1+x)e^{2kx}$, dove k è un parametro reale negativo. Determinare il valore di k tale per cui la funzione f presenta un punto di massimo assoluto di ascissa pari a 3.

3) Calcoliamo la derivata della funzione f, $f'(x) = 1 \cdot e^{2kx} + (1+x) \cdot e^{2kx} \cdot 2k = (1+2k+2kx)e^{2kx}$; posto $(1+2k+2kx)e^{2kx} \geq 0$ si ottiene $1+2k+2kx \geq 0$ ovvero $2kx \geq -(1+2k)$ che ha soluzione $x \leq -\dfrac{1+2k}{2k}$ (k negativo). Funzione crescente per $x \leq -\dfrac{1+2k}{2k}$, decrescente per $x \geq -\dfrac{1+2k}{2k}$, di conseguenza la funzione, continua e definita su tutto $\mathbb{R}$, presenta punto di massimo assoluto di ascissa $x = -\dfrac{1+2k}{2k}$. Posto $-\dfrac{1+2k}{2k} = 3$ si ottiene $-\dfrac{1}{2k} = 4$ ovvero $2k = -\dfrac{1}{4}$ da cui $k = -\dfrac{1}{8}$.

Soluzione Alternativa: la funzione proposta è derivabile due volte su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, se essa presenta un punto di massimo assoluto di ascissa pari a 3, la sua derivata nel punto deve risultare uguale a zero; $f'(x) = (1+2k+2kx)e^{2kx}$ con $f'(3) = (1+8k)e^{6k}$, posto $(1+8k)e^{6k} = 0$ otteniamo facilmente $k = -\dfrac{1}{8}$. Per verificare che il punto di ascissa 3 è punto di massimo assoluto dobbiamo accertare che $f''(3) < 0$; calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{4}x\right)e^{-\frac{x}{4}} \text{ con}$$

$$f''(3) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{3}{4}} < 0.$$

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen\, x^2}{sen\, 2x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} log\, x^4 \cdot \left(10 + log\, x^4\right)$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen\, x^2}{sen\, 2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\frac{arcsen\, x^2}{x^2}}{\frac{sen\, 2x^2}{2x^2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(\to 1)}{(\to 1)} = \dfrac{1}{2}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen\, x^2}{sen\, 2x^2} = \dfrac{(\to 0)}{(\to 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen\, x^2}{sen\, 2x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{1-x^4}} \cdot \cancel{2x}}{cos\, 2x^2 \cdot \cancel{4x}^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{1-x^4}}}{cos\, 2x^2 \cdot 2} = \dfrac{(\to 1)}{(\to 1) \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$.

Per il secondo limite notiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} log\, x^4 = +\infty$, pertanto

$\lim\limits_{x \to +\infty} log\, x^4 \cdot \left(10 + log\, x^4\right) = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{3x} + e^{-2x}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{3(-x)} + e^{-2(-x)} = e^{-3x} + e^{2x}$, espressione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$. Funzione né pari, né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $e^{3x} + e^{-2x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Funzione positiva su tutto il suo campo d'esistenza; $y(0) = e^0 + e^0 = 2$. Unica intersezione con gli assi nel punto $A(0,2)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} + e^{-2x} = (\to 0) + (\to +\infty) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{x} = -\infty$, in quanto per $x \to -\infty$ sia e^{3x} che x sono $o(e^{-2x})$, pertanto $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{o(e^{-2x}) + e^{-2x}}{o(e^{-2x})} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-2x}}{o(e^{-2x})} = -\infty$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{x} = \dfrac{(\to +\infty)}{(\to -\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3e^{3x} - 2e^{-2x}}{1} = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3x} + e^{-2x} = (\to +\infty) + (\to 0) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to +\infty$ sia e^{-2x} che x sono $o(e^{3x})$, pertanto $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + o(e^{3x})}{o(e^{3x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{o(e^{3x})} = +\infty$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{x} = \dfrac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + e^{-2x}}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3e^{3x} - 2e^{-2x}}{1} = (\to +\infty) - (\to 0) = +\infty$.

La funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 3e^{3x} - 2e^{-2x}$. $y' > 0$ se $3e^{3x} > 2e^{-2x}$, dividiamo ogni fattore della disequazione per 3 e moltiplichiamo ogni fattore per e^{2x} ottenendo:

$e^{5x} > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 5x > log\left(\dfrac{2}{3}\right)$ ovvero $x > \dfrac{1}{5} log\left(\dfrac{2}{3}\right) = log\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}} \approx -0.08$.

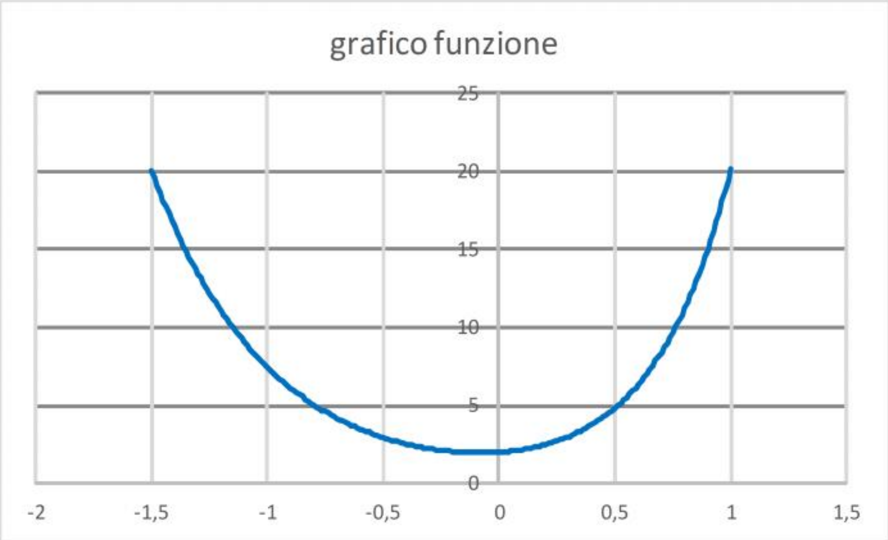
Funzione decrescente in $\left]-\infty, log\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}}\right[$, crescente in $\left]log\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}}, +\infty\right[$, punto di minimo assoluto di ascissa $log\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ con

$$y\left(log\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right) = e^{3\cdot log\sqrt[5]{\frac{2}{3}}} + e^{-2\cdot log\sqrt[5]{\frac{2}{3}}} = e^{log\sqrt[5]{\frac{8}{27}}} + e^{log\sqrt[5]{\frac{4}{9}}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{8}{27}} + \sqrt[5]{\frac{4}{9}} \approx 1.96\,.$$

Concavità e convessità: $y'' = 9e^{3x} + 4e^{-2x}$. $y'' > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Funzione convessa su tutto il suo campo d'esistenza.

Grafico:



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_1^2 x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^4}\right) dx\,.$

6) $\int_1^2 x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^4}\right)\ dx\ = \int_1^2 \left(x^3 - \frac{2}{x}\right) dx\ = \left(\frac{x^4}{4} - 2\,log|x|\right)_1^2 =$

$$(4 - 2\,log\,2) - \left(\frac{1}{4} - 2\,log\,1\right) = \frac{15}{4} - 2\,log\,2 \approx 2.36.$$

7) (6 punti) Siano dati i vettori $X = (2,\ -2, 2,\ -2)$, $Y = (3, 0,\ -3, 0)$ e $Z = (\alpha, \beta, \beta, \alpha)$. Determinare i valori dei parametri α e β affinché il vettore Z risulti perpendicolare al vettore Y ($Z \perp Y$), e presenti modulo pari al modulo del vettore X ($\|Z\| = \|X\|$).

7) Il vettore Z risulta perpendicolare al vettore Y se e solo se il prodotto scalare $Z \cdot Y$ è pari a zero con $Z \cdot Y = \alpha \cdot 3 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-3) + \beta \cdot 0 = 3\alpha - 3\beta$. Calcoliamo ora i due moduli: $\|Z\| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2} = \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2}$ e $\|X\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{16}$. Per determinare i valori dei parametri α e β richiesti dobbiamo quindi risolvere il sistema:
$\begin{cases} 3\alpha - 3\beta = 0 \\ 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 4\alpha^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 2 \\ \beta = \pm 2 \end{cases}$. Le uniche coppie di valori che soddisfano le richieste indicate sono $\alpha = 2$, $\beta = 2$ e $\alpha = -2$, $\beta = -2$.

8) (8 punti) Determinare la natura dell'unico punto critico della funzione $f(x,\, y) = 5y^2 - 4x^2 + 3x\,.$

8) $\nabla f = (-8x + 3, 10y)$.

FOC: $\begin{cases} -8x+3=0 \\ 10y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x=-3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{8} \\ y=0 \end{cases}$; unico punto critico $P\left(\dfrac{3}{8},0\right)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -80 < 0$. P punto di sella.