Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

4 giugno 2026

Compito $\mathbb{G}7$✓

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, determinare se la proposizione semplice q risulta vera o falsa, sapendo che la proposizione composta $\neg(p\ o\ q) \Rightarrow (q\, e\, r)$ è falsa.
2) (7 punti) Siano dati i tre insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 7\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}: 4 \leq x \leq 12\}$. Calcolare gli insiemi: $D = A \cup (B \cap C)$ e $E = A \cap \mathcal{C}(B \cup C)$. Per ognuno degli insiemi D ed E indicare se si tratta di insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo il complementare dell'insieme X)
3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = (1 + 2kx)e^x$, dove k è un parametro reale positivo. Determinare il valore di k tale per cui la funzione f presenta un punto di minimo assoluto di ascissa pari a -2.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x^2}{arcsen\, 3x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} log\, x^3 \cdot \left(2 - log\, x^3\right)$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{2x} - e^{-3x}$.
6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^2 x^2 \cdot \left(3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$.
7) (6 punti) Siano dati i vettori $X = (1, 1, -1, -1)$, $Y = (3, 0, -3, 0)$ e $Z = (\alpha, \alpha, \beta, \beta)$. Determinare i valori dei parametri α e β affinché il vettore Z risulti perpendicolare al vettore Y ($Z \perp Y$), e presenti modulo pari al modulo del vettore X ($\|Z\| = \|X\|$).
8) (8 punti) Determinare la natura dell'unico punto critico della funzione $f(x, y) = 6y^2 + 5x^2 + 2x$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

4 giugno 2026

Compito $\mathbb{G}8$✓

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, determinare se la proposizione semplice q risulta vera o falsa, sapendo che la proposizione composta $(p\ e\ q) \Rightarrow \neg(q\ o\ r)$ è falsa.
2) (7 punti) Siano dati i tre insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: 8 < x < 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 5 \leq x \leq 7\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}: 5 < x < 12\}$. Calcolare gli insiemi: $D = A \cap (B \cup C)$ e $E = A \cup \mathcal{C}(B \cap C)$. Per ognuno degli insiemi D ed E indicare se si tratta di insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo il complementare dell'insieme X)
3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = (1+x)e^{2kx}$, dove k è un parametro reale negativo. Determinare il valore di k tale per cui la funzione f presenta un punto di massimo assoluto di ascissa pari a 3.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen\, x^2}{sen\, 2x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} log\, x^4 \cdot \left(10 + log\, x^4\right)$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = e^{3x} + e^{-2x}$.
6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^2 x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^4}\right) dx$.
7) (6 punti) Siano dati i vettori $X = (2, -2, 2, -2)$, $Y = (3, 0, -3, 0)$ e $Z = (\alpha, \beta, \beta, \alpha)$. Determinare i valori dei parametri α e β affinché il vettore Z risulti perpendicolare al vettore Y ($Z \perp Y$), e presenti modulo pari al modulo del vettore X ($\|Z\| = \|X\|$).
8) (8 punti) Determinare la natura dell'unico punto critico della funzione $f(x, y) = 5y^2 - 4x^2 + 3x$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.