

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

6 luglio 2026

Compito L1

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta $\neg(p \vee r) \Leftrightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow p)$ nell'ipotesi che la proposizione q sia vera.

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione composta $\neg(p \vee r) \Leftrightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow p)$ considerando solo i casi in cui la proposizione q è vera:

p	q	r	$p \vee r$	$q \wedge r$	$\neg(p \vee r)$	$(q \wedge r) \Rightarrow p$	$\neg(p \vee r) \Leftrightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V

2) (6 punti) Determinare il Campo d'Esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{\log(1 - \log x)}$; indicato con C l'insieme ottenuto, calcolare il suo insieme di chiusura \overline{C} .

2) $C = \{x \in \mathbb{R} : \log(1 - \log x) \geq 0\}$; risolviamo la disequazione:

$$\log(1 - \log x) \geq 0 \Rightarrow 1 - \log x \geq 1 \Leftrightarrow \log x \leq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1. \quad C =]0, 1], \text{ con } \overline{C} = [0, 1].$$

3) (7 punti) Si consideri la funzione $f(x) = e^{3x+1} + 2$ e sia inoltre $f(g(x)) = 3x - 2$. Determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e della funzione composta $g(g(x))$.

3) Da $f(x) = e^{3x+1} + 2$ otteniamo $f(g(x)) = e^{3g(x)+1} + 2$, posto $e^{3g(x)+1} + 2 = 3x - 2$ si ha $e^{3g(x)+1} = 3x - 4$ con $3g(x) + 1 = \log(3x - 4)$ ed in conclusione

$$g(x) = \frac{\log(3x - 4) - 1}{3} = \log \sqrt[3]{\frac{3x - 4}{e}}. \quad g(g(x)) = g\left(\frac{\log(3x - 4) - 1}{3}\right) =$$

$$\frac{\log\left(3 \cdot \frac{\log(3x - 4) - 1}{3} - 4\right) - 1}{3} = \frac{\log(\log(3x - 4) - 5) - 1}{3} =$$

$$\frac{\log\left(\log\left(\frac{3x - 4}{e^5}\right)\right) - 1}{3} = \frac{\log\left(\frac{\log\left(\frac{3x - 4}{e^5}\right)}{e}\right)}{3} = \log \sqrt[3]{\frac{\log\left(\frac{3x - 4}{e^5}\right)}{e}} =$$

$$\log \sqrt[3]{\log \sqrt[3]{\frac{3x - 4}{e^5}}}.$$

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \log 5x}{5x + \log 2x}$.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos 3x}{9x^2} \cdot 9}{\frac{1 - \cos 2x}{4x^2} \cdot 4} = \frac{\left(\rightarrow \frac{1}{2}\right) \cdot 9}{\left(\rightarrow \frac{1}{2}\right) \cdot 4} = \frac{9}{4}.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x \cdot 3}{\text{sen } 2x \cdot 2} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)} \text{ FI; applichiamo nuovamente il}$$

$$\text{Teorema: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x \cdot 3}{\text{sen } 2x \cdot 2} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x \cdot 9}{\cos 2x \cdot 4} = \frac{(\rightarrow 1) \cdot 9}{(\rightarrow 1) \cdot 4} = \frac{9}{4}.$$

Per il secondo limite notiamo che per $x \rightarrow +\infty$, $\log 5x = o(2x)$ e $\log 2x = o(5x)$,
 pertanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \log 5x}{5x + \log 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + o(2x)}{5x + o(5x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \log 5x}{5x + \log 2x} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ FI. Applichiamo il

Teorema: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \log 5x}{5x + \log 2x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{5x} \cdot 5}{5 + \frac{1}{2x} \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{5 + \frac{1}{x}} = \frac{2 + (+\infty)}{5 + (+\infty)} = \frac{2}{5}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = xe^{x^2}.$$

5) C.E.: \mathbb{R} .

Eventuali simmetrie: $y(-x) = -xe^{(-x)^2} = -xe^{x^2} = -y(x)$, funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $xe^{x^2} > 0, \forall x > 0$. Funzione positiva in $]0, +\infty[$; $y(0) = 0 \cdot e^0 = 0$. Unica intersezione con gli assi nel punto $O(0, 0)$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty, \text{ la funzione non presenta asintotii.}$$

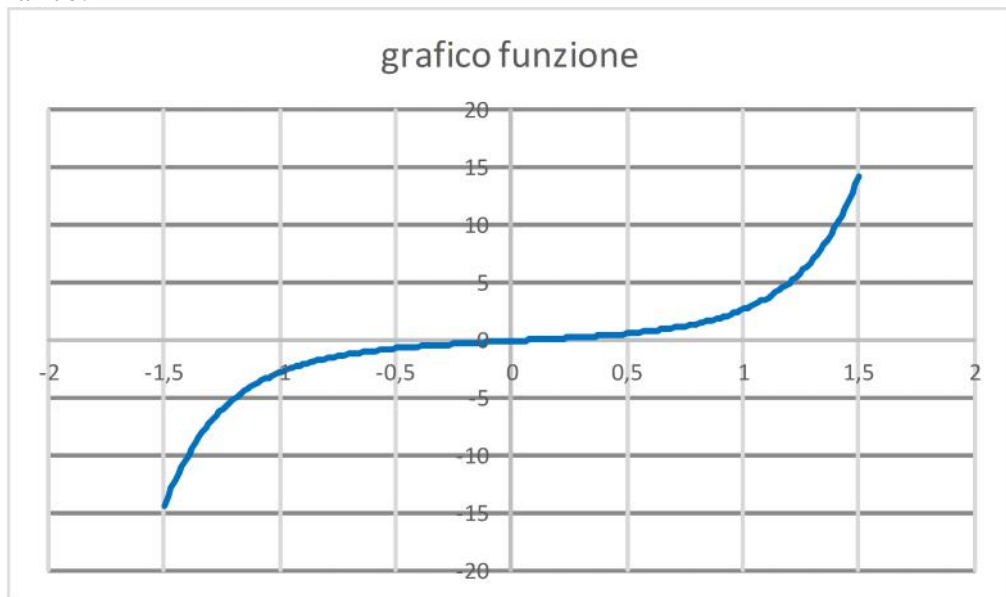
Crescenza e decrescenza: $y' = 1 \cdot e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = (1 + 2x^2)e^{x^2}$. $y' > 0, \forall x \geq 0$.

Funzione strettamente crescente.

Concavità e convessità: $y'' = 4x \cdot e^{x^2} + (1 + 2x^2)e^{x^2} \cdot 2x = 2x(3 + 2x^2)e^{x^2}$.

$y'' > 0, \forall x > 0$. Funzione convessa in $]0, +\infty[$, unico punto di flesso $O(0, 0)$.

Grafico:



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_0^1 (e^{3x} + e^x + 2x) dx$.

$$6) \int_0^1 (e^{3x} + e^x + 2x) dx = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + e^x + x^2 \right)_0^1 = \left(\frac{1}{3}e^3 + e + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 + 0 \right) = \frac{1}{3}e^3 + e - \frac{1}{3} = \frac{e^3 + 3e - 1}{3} \approx 9.08.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = x + 2\sqrt{x}$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x_0 = 4$.

7) La generica equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile nel punto x_0 è $y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$, nel caso specifico ($x_0 = 4$), l'equazione risulta $y - y(4) = y'(4) \cdot (x - 4)$. $y(4) = 4 + 2\sqrt{4} = 8$, $y' = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y'(4) = 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}. \text{ L'equazione richiesta è } y - 8 = \frac{3}{2} \cdot (x - 4) \text{ che}$$

può essere scritta in forma esplicita come: $y = \frac{3}{2}x + 2$.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy.$$

$$8) \nabla f = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x).$$

$$FOC: \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^4 - 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x^4 - 27x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x(x^3 - 27) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}; \text{ due punti critici } O(0, 0) \text{ e } P(3, 3).$$

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{bmatrix} \text{ con } |\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 81.$$

$SOC: |\mathcal{H}f(O)| = -81 < 0$. O punto di sella.

$$|\mathcal{H}f(P)| = 243 > 0; f''_{xx}(P) = 18 > 0. P \text{ punto di minimo.}$$