

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

1 settembre 2026

Compito S1

- 1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, determinare se la proposizione composta $((p \Rightarrow q) \circ r) \Leftrightarrow ((\neg r \Rightarrow \neg p) \circ q)$ è una tautologia.
- 1) *Primo Metodo (Tramite la Tavola di Verità)*: costruiamo la Tavola di Verità della proposizione composta $((p \Rightarrow q) \circ r) \Leftrightarrow ((\neg r \Rightarrow \neg p) \circ q)$ indicando questa con la lettera s :

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$p \Rightarrow q$	$\neg r \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \circ r$	$(\neg r \Rightarrow \neg p) \circ q$	s
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Come è facile verificare dall'ultima colonna della Tavola di Verità, la proposizione proposta è una tautologia.

Secondo Metodo (Tramite le proprietà dei connettivi logici): ricordiamo che $(t \Rightarrow u) \Leftrightarrow (\neg t \circ u)$ e per la proprietà commutativa della disgiunzione logica e la proprietà transitiva dell'equivalenza logica otteniamo: $((p \Rightarrow q) \circ r) \Leftrightarrow (\neg p \circ q \circ r) \Leftrightarrow (r \circ \neg p \circ q) \Leftrightarrow (\neg(\neg r) \circ \neg p \circ q) \Leftrightarrow ((\neg r \Rightarrow \neg p) \circ q)$. La proposizione proposta $((p \Rightarrow q) \circ r) \Leftrightarrow ((\neg r \Rightarrow \neg p) \circ q)$ è una tautologia.

- 2) (6 punti) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica

verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2x^2}{x^2}$.

- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} + 2 = (\rightarrow 0) + 2 = 2$. Per la verifica del limite abbiamo $\left| \frac{3 + 2x^2}{x^2} - 2 \right| = \left| \frac{3}{x^2} \right| = \frac{3}{x^2}$; posto $\frac{3}{x^2} < \epsilon$ otteniamo $x^2 > \frac{3}{\epsilon}$ ed in conclusione $x > \sqrt{\frac{3}{\epsilon}}$, limite verificato con $\delta_\epsilon = \sqrt{\frac{3}{\epsilon}}$.

- 3) (7 punti) Siano date le funzioni $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ e $g(x) = e^x$. Verificare se la funzione composta $f(g(x))$ risulta invertibile sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, ed in caso affermativo determinare l'espressione della sua inversa.

- 3) $f(g(x)) = f(e^x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 3}$; per verificare se la funzione composta è invertibile

sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ calcoliamo la sua derivata: $y = \frac{e^x - 2}{e^x + 3} \Rightarrow$

$$y' = \frac{e^x(e^x + 3) - e^x(e^x - 2)}{(e^x + 3)^2} = \frac{5e^x}{(e^x + 3)^2} \text{ con } y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(g(x)) \text{ è}$$

funzione continua e strettamente monotona crescente sull'insieme $\mathbb{R}$, di conseguenza su tale insieme è invertibile. Per determinare la sua funzione inversa, posto

$$y = \frac{e^x - 2}{e^x + 3} \text{ otteniamo } y(e^x + 3) = e^x - 2 \text{ con } e^x(y - 1) = -3y - 2 \text{ da cui}$$

$$e^x = \frac{2+3y}{1-y} \text{ ed in conclusione } x = \log\left(\frac{2+3y}{1-y}\right). \text{ Funzione inversa di equazione } y = \log\left(\frac{2+3x}{1-x}\right).$$

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{1 - e^{2x}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \cos x}{x - \cos x}\right)^x$.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{1 - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{3x}-1}{x}}{\frac{1-e^{2x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{e^{3x}-1}{3x}}{\frac{e^{2x}-1}{2x}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(\rightarrow 1)}{(\rightarrow 1)} = -\frac{3}{2}.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{1 - e^{2x}} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{1 - e^{2x}} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \cdot 3}{-e^{2x} \cdot 2} = \frac{(\rightarrow 1) \cdot 3}{-(\rightarrow 1) \cdot 2} = -\frac{3}{2}.$$

Per il secondo limite notiamo che per $x \rightarrow +\infty$, $\cos x = o(2x) = o(x)$, pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \cos x}{x - \cos x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + o(2x)}{x - o(x)}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

5) C.E.: $1+x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$; C.E. = $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = y(x)$, funzione pari

(simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\frac{x^2}{1+x^2} > 0, \forall x > 0$. Funzione positiva in

$]0, +\infty[$; $y(0) = \frac{0^2}{1+0^2} = 0$. Unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2(\frac{1}{x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1}{(\rightarrow 0) + 1} = 1,$$

la funzione presenta asintoto orizzontale destro di equazione $y = 1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot y' > 0$,

$\forall x > 0$. Funzione strettamente crescente in $[0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$

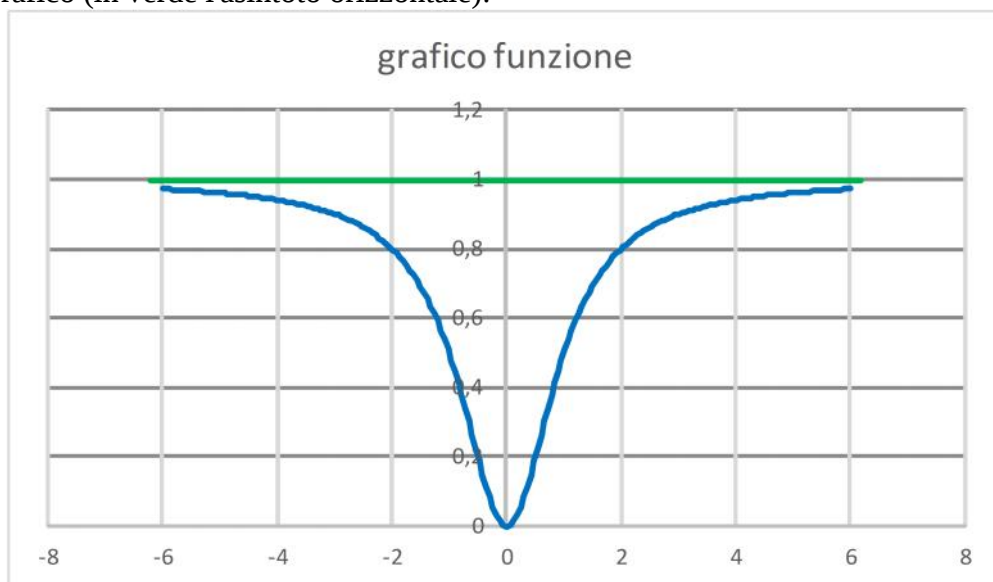
$$\frac{2(1+x^2)(1-3x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \cdot y'' > 0, \text{ se } 1-3x^2 > 0 \Leftrightarrow 3x^2 < 1 \text{ ovvero}$$

$x^2 < \frac{1}{3}$ da cui $0 \leq x < \sqrt{\frac{1}{3}}$. Funzione convessa in $\left[0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, concava in

$$\left[\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty \right], \text{ punto di flesso per } x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ con } y\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{4},$$

$$F\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}\right).$$

Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_0^e \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x} \right) dx$.

$$6) \int_0^e \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x} \right) dx = \int_0^e \left(\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) dx = \int_0^e (e^x + e^{-x}) dx =$$

$$(e^x - e^{-x})_0^e = (e^e - e^{-e}) - (1 - 1) = e^e - e^{-e} \approx 15.09.$$

Soluzione Alternativa (tramite l'Integrazione per Sostituzione): posto $e^x = t$

abbiamo $x = \log t$ con $dx = \frac{1}{t} dt$. Torniamo all'integrale definito:

$$\int_0^e \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x} \right) dx = \int_1^{e^e} \left(\frac{t^2 + 1}{t} \right) \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^e} \left(\frac{t^2 + 1}{t^2} \right) dt =$$

$$\int_1^{e^e} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = \left(t - \frac{1}{t} \right)_1^{e^e} = \left(e^e - \frac{1}{e^e} \right) - (1 - 1) = e^e - \frac{1}{e^e} \approx 15.09.$$

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = kx^2 + \log(1 + mx)$. Determinare i valori dei parametri k e m sapendo che il polinomio di McLaurin di grado 2 della funzione è $P_2(x) = x + \frac{5}{2}x^2$.

7) Il generico polinomio di McLaurin di grado 2 ha equazione

$$P_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2}y''(0) \cdot x^2, \text{ per la funzione proposta } y(0) = 0,$$

$$y' = 2kx + \frac{m}{1 + mx} \text{ con } y'(0) = m, y'' = 2k - \frac{m^2}{(1 + mx)^2} \text{ con}$$

$y''(0) = 2k - m^2$; quindi per la funzione data il suo polinomio di McLaurin di grado

$$2 \text{ è } P_2(x) = mx + \frac{2k - m^2}{2}x^2, \text{ posto } mx + \frac{2k - m^2}{2}x^2 = x + \frac{5}{2}x^2 \text{ otteniamo}$$

facilmente $m = 1$ e $k = 3$.

Soluzione Alternativa: ricordiamo che il polinomio di McLaurin di grado 2 della funzione $\log(1+x)$ è $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, quindi il polinomio di McLaurin di grado 2 della funzione $\log(1+mx)$ sarà $P_2(x) = mx - \frac{m^2}{2}x^2$ con il polinomio della funzione proposta pari a $P_2(x) = kx^2 + mx - \frac{m^2}{2}x^2 = mx + \frac{2k-m^2}{2}x^2$. Il resto dell'esercizio segue come nella pagina precedente.

8) (8 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2y + y^2 - 2xy.$$

$$8) \nabla f = (2xy - 2y, x^2 + 2y - 2x).$$

$$FOC: \begin{cases} 2xy - 2y = 0 \\ x^2 + 2y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(x-1) = 0 \\ x^2 + 2y - 2x = 0 \end{cases}:$$

$$\text{se } y = 0 \text{ il sistema si riduce a } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = 2 \end{cases};$$

$$\text{se } x = 1 \text{ il sistema si riduce a } \begin{cases} x = 1 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Tre punti critici } O(0,0),$$

$$P(2,0) \text{ e } Q\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 2 \end{bmatrix} \text{ con } |\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 2 \end{vmatrix} = 4y - (2x-2)^2.$$

$$SOC: |\mathcal{H}f(O)| = -4 < 0. O \text{ punto di sella.}$$

$$|\mathcal{H}f(P)| = -4 < 0. P \text{ punto di sella.}$$

$$|\mathcal{H}f(Q)| = 2 > 0; f''_{xx}(Q) = 1 > 0. Q \text{ punto di minimo.}$$