

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

15 settembre 2026

Compito §2

- 1) (6 punti) Siano p e q due proposizioni semplici, determinare se la proposizione composta $(q \Rightarrow \neg p) \vee (q \wedge p)$ è una tautologia.
- 1) *Primo Metodo (Tramite la Tavola di Verità)*: costruiamo la Tavola di Verità della proposizione composta $(q \Rightarrow \neg p) \vee (q \wedge p)$:

p	q	$\neg p$	$q \Rightarrow \neg p$	$q \wedge p$	$(q \Rightarrow \neg p) \vee (q \wedge p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V

Come è facile verificare dall'ultima colonna della Tavola di Verità, la proposizione proposta è una tautologia.

Secondo Metodo (Tramite le proprietà dei connettivi logici): ricordiamo che

$(t \Rightarrow u) \Leftrightarrow (\neg t \vee u)$ e per le leggi di De Morgan otteniamo:

$((q \Rightarrow \neg p) \vee (q \wedge p)) \Leftrightarrow ((\neg q \vee \neg p) \vee (q \wedge p)) \Leftrightarrow (\neg(q \wedge p) \vee (q \wedge p))$. La proposizione proposta $(q \Rightarrow \neg p) \vee (q \wedge p)$ è una tautologia per la legge del terzo escluso.

- 2) (6 punti) Determinare il valore del parametro k tale per cui vale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{e^{2x} - 1} = 2$.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{kx}-1}{kx} \cdot k}{\frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2} = \frac{(\rightarrow 1) \cdot k}{(\rightarrow 1) \cdot 2} = \frac{k}{2}. \text{ Posto } \frac{k}{2} = 2 \text{ otteniamo}$$

facilmente $k = 2$.

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

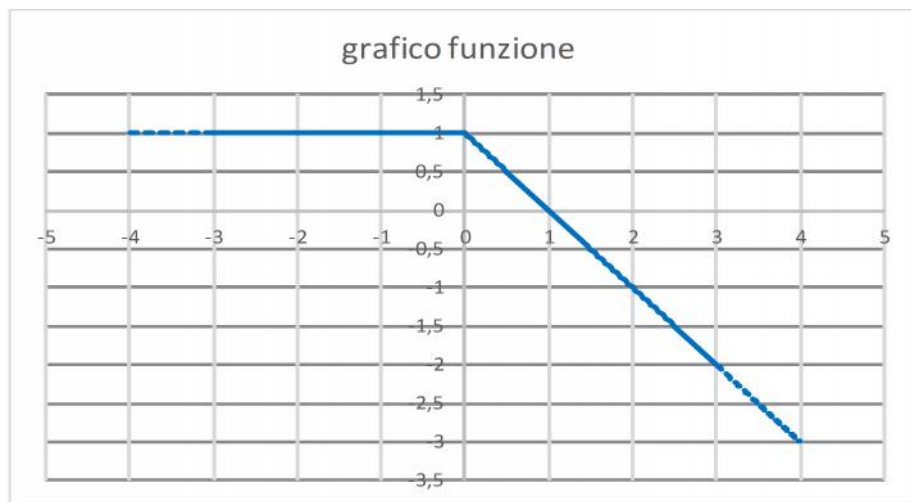
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{e^{2x} - 1} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} \cdot k}{e^{2x} \cdot 2} = \frac{(\rightarrow 1) \cdot k}{(\rightarrow 1) \cdot 2} = \frac{k}{2}.$$

- 3) (7 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{se } 0 < x \end{cases}$. Disegnare il suo grafico e

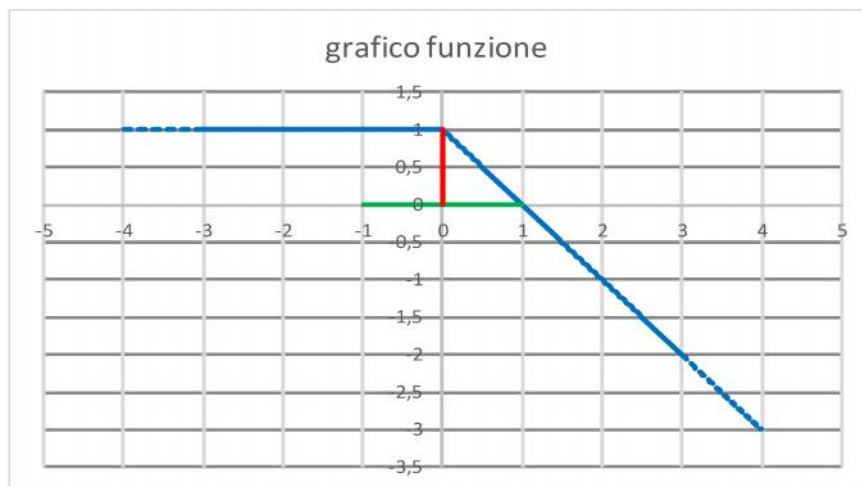
determinare l'insieme $f([-1, 1])$ immagine dell'insieme $[-1, 1]$, e l'insieme

$f^{-1}([-1, 1])$ controimmagine dell'insieme $[-1, 1]$

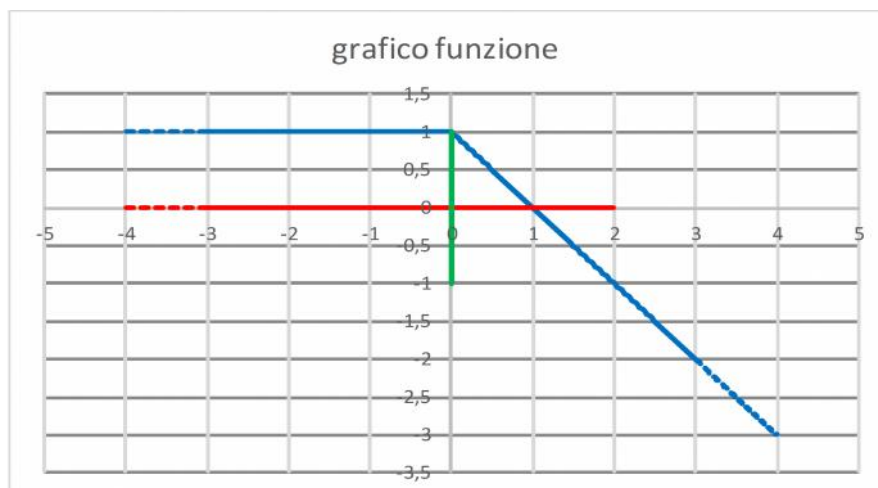
- 3) Nella pagina successiva il grafico della funzione $f(x)$:



L'insieme $f([- 1, 1]) = \{y: y = f(x) \text{ e } x \in [- 1, 1]\}$, nel grafico che segue con il colore verde è evidenziato l'insieme $[- 1, 1]$ posto sull'asse delle ascisse, come è facile notare l'insieme delle immagini dei valori evidenziati in verde è l'intervallo evidenziato in rosso sull'asse delle ordinate, $f([- 1, 1]) = [0, 1]$.



L'insieme $f^{-1}([- 1, 1]) = \{x: f(x) \in [- 1, 1]\}$, nel grafico che segue con il colore verde è evidenziato l'insieme $[- 1, 1]$ sull'asse delle ordinate, come si può notare l'insieme dei valori x che hanno immagini che cadono nell'intervallo $[- 1, 1]$ è l'intervallo evidenziato in rosso, $f^{-1}([- 1, 1]) =] - \infty, 2]$.



4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+5}{3x-5} \right)^x$.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{9x^2} \cdot 9 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} \cdot 9 = \left(\rightarrow \frac{1}{2} \right) \cdot 9 = \frac{9}{2}.$$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De

L'Hôpital, infatti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)}$ FI. Applichiamo il Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cdot 3}{2x} = \frac{(\rightarrow 0)}{(\rightarrow 0)} \text{ FI. Applichiamo nuovamente}$$

$$\text{il Teorema: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cdot 3}{2x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) \cdot 9}{2} = \frac{(\rightarrow 1) \cdot 9}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+5}{3x-5} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x}(2+\frac{5}{x})}{\cancel{x}(3-\frac{5}{x})} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+\frac{5}{x}}{3-\frac{5}{x}} \right)^x = \left(\rightarrow \frac{2}{3} \right)^{(\rightarrow +\infty)} = 0.$$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione

$$y = x^2 e^{x^2}.$$

5) C.E.: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = (-x)^2 e^{(-x)^2} = x^2 e^{x^2} = y(x)$, funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) la studiamo solo per $x \in [0, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $x^2 e^{x^2} > 0, \forall x > 0$. Funzione positiva in $]0, +\infty[$; $y(0) = 0^2 e^{0^2} = 0$. Unica intersezione con gli assi nel punto $O(0, 0)$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{x^2} = (\rightarrow +\infty) \cdot (\rightarrow +\infty) = +\infty.$$

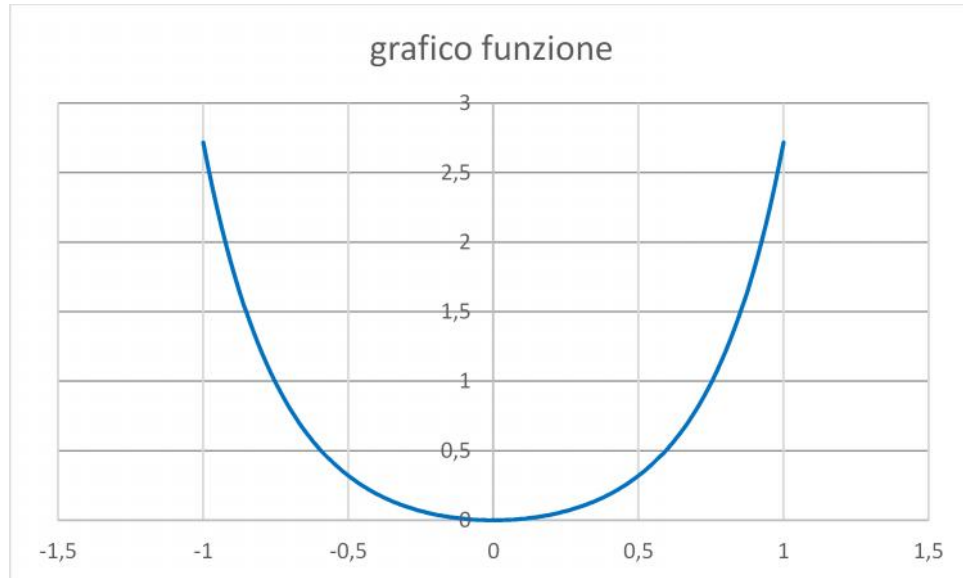
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} = (\rightarrow +\infty) \cdot (\rightarrow +\infty) = +\infty; \text{ la funzione non presenta asintoti.}$$

Crescenza e decrescenza: $y' = 2x \cdot e^{x^2} + x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2x(1+x^2)e^{x^2}$. $y' > 0, \forall x > 0$. Funzione strettamente crescente in $[0, +\infty[$. Punto di minimo assoluto in $O(0, 0)$.

$$\text{Concavità e convessità: } y'' = 2(1+x^2)e^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} + 2x(1+x^2)e^{x^2} \cdot 2x = 2((1+x^2) + 2x^2 + 2x^2(1+x^2))e^{x^2} = 2(1+5x^2+2x^4)e^{x^2}. y'' > 0, \forall x > 0.$$

Funzione convessa in $[0, +\infty[$. La funzione non presenta punti di flesso.

Grafico:



6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_1^3 \left(\frac{2x+1}{2x} \right) dx$.

$$6) \int_1^3 \left(\frac{2x+1}{2x} \right) dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{1}{2x} \right) dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$\left(x + \frac{1}{2} \log|x| \right)_1^3 = \left(3 + \frac{1}{2} \log|3| \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \log|1| \right) = 2 + \frac{1}{2} \log 3 =$$

$$2 + \log \sqrt{3} = \log(e^2 \sqrt{3}) \approx 2.55.$$

7) (7 punti) Determinare l'intervallo in cui la funzione di equazione $y = x^2 \cdot \log x$ risulta concava.

7) Ricordiamo che una funzione derivabile due volte risulta concava in un intervallo di numeri reali se e solo se la sua derivata seconda è negativa. Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda della funzione proposta: $y' = 2x \cdot \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$

$$2x \cdot \log x + x = x \cdot (2 \log x + 1); y'' = 1 \cdot (2 \log x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} =$$

$$2 \log x + 3. \text{ Posto } 2 \log x + 3 < 0 \text{ otteniamo } \log x < -\frac{3}{2} \text{ con soluzione}$$

$$0 < x < e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}. \text{ La funzione è concava nell'intervallo } \left] 0, \frac{1}{e\sqrt{e}} \right[.$$

8) (8 punti) Determinare la natura dell'unico punto critico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 5y$.

$$8) \nabla f = (2x - 2, 2y - 5).$$

$$FOC: \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Unico punto critico } P\left(1, \frac{5}{2}\right).$$

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ con } |\mathcal{H}f| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

$$SOC: |\mathcal{H}f(P)| = 4 > 0; f''_{xx}(P) = 2 > 0. P \text{ punto di minimo.}$$