Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2025-26)

12 ottobre 2026

Compito $\mathbb{O}1$

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici, determinare la verità o falsità della proposizione composta $(p \Rightarrow q)\ e\ (p \Rightarrow r)$ sapendo che la proposizione composta $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ è vera.

1) *Primo Metodo (Tramite la Tavola di Verità)*: costruiamo la Tavola di Verità della proposizione composta $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ e la tavola di verità della proposizione composta $(p \Rightarrow q)\ e\ (p \Rightarrow r)$ solo nei casi in cui la precedente proposizione è vera:

p	q	r	$q\ e\ r$	$p \Rightarrow (q\ e\ r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q)\ e\ (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F			
V	F	V	F	F			
V	F	F	F	F			
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

.

Come è facile verificare dall'ultima colonna della Tavola di Verità, la proposizione proposta $(p \Rightarrow q)\ e\ (p \Rightarrow r)$ è vera se la proposizione composta $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ è vera.

Secondo Metodo (Tramite il ragionamento logico): se $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ allora p è falsa oppure p, q e r sono tre proposizioni vere, ma se p è falsa oppure p, q e r sono tutte e tre vere, $p \Rightarrow q$ e $p \Rightarrow r$ sono entrambe vere e di conseguenza $(p \Rightarrow q)\ e\ (p \Rightarrow r)$ è vera.

2) (8 punti) Siano date le funzioni: $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = x + 1$. Determinare le espressioni delle funzioni composte $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(h(x))$ e $f(f(g(x)))$.

2) $f(g(x)) = f(e^x) = \sqrt[3]{1+e^x}$; $g(f(x)) = g\big(\sqrt[3]{1+x}\big) = e^{\sqrt[3]{1+x}}$;
$g(h(x)) = g(x+1) = e^{x+1}$; $f(f(g(x))) = f\big(\sqrt[3]{1+e^x}\big) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+e^x}}$.

3) (6 punti) Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq -2 \\ x^2+1 & \text{se } -2 < x < 1 \\ x+b & \text{se } 1 \leq x \end{cases}$. Calcolare i valori dei parametri a e b che rendono la funzione continua sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

3) La funzione proposta è palesemente continua nell'insieme $\mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$; per studiare la continuità nei punti -2 e 1 andiamo a calcolare i limiti destro e sinistro della funzione in questi due punti: $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} a = a$ e $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} x^2 + 1 = 5$, quindi f è continua nel punto -2 se e solo se $a = 5$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + b = 1 + b$, di conseguenza f è continua nel punto 1 se e solo se $1 + b = 2$ ovvero $b = 1$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \dfrac{9^x - 3^x}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{log^2\, x}{1 + log^2\, x}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{9^x - 3^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{9^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} = log\,9 - log\,3 = log\,\frac{9}{3} = log\,3.$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{9^x - 3^x}{x} = \frac{(\to 0)}{(\to 0)}\ FI.$ Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to 0} \frac{9^x - 3^x}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{9^x \cdot log\,9 - 3^x \cdot log\,3}{1} =$

$\frac{(\to 1) \cdot log\,9 - (\to 1) \cdot log\,3}{1} = log\,9 - log\,3 = log\,3.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{log^2 x}{1 + log^2 x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{log^2 x}}{\cancel{log^2 x}\left(\frac{1}{log^2 x} + 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{log^2 x} + 1} =$

$\frac{1}{(\to 0) + 1} = 1.$

Il limite proposto può essere risolto anche tramite l'utilizzo del Teorema di De L'Hôpital, infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{log^2 x}{1 + log^2 x} = \frac{(\to \infty)}{(\to \infty)}\ FI.$ Applichiamo il Teorema:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{log^2 x}{1 + log^2 x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot log\,x \cdot \frac{1}{x}}{2 \cdot log\,x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1.$

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione di equazione $y = \frac{1}{x^2} - 2x$.

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$, $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} - 2(-x) = \frac{1}{x^2} + 2x$, $y(-x)$ è diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$, funzione né pari, né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $\frac{1}{x^2} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{1 - 2x^3}{x^2} > 0 \Rightarrow$ $1 - 2x^3 > 0 \Rightarrow x^3 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Funzione positiva in $]-\infty, 0[$ e in $\left]0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right[$, funzione negativa in $\left]\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$. Unica intersezione con gli assi nel punto $A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 0\right)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

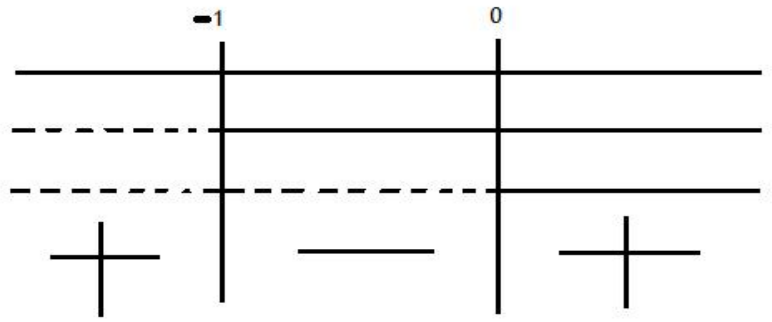
$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} - 2x = (\to 0) - 2(\to \pm\infty) = \mp\infty$; la funzione non presenta asintoti orizzontali.

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^3} - 2 = (\to 0) - 2 = -2.$

$\lim_{x \to \pm\infty} y - (-2)x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} - 2x + 2x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; la funzione presenta asintoto obliquo completo di equazione $y = -2x$.

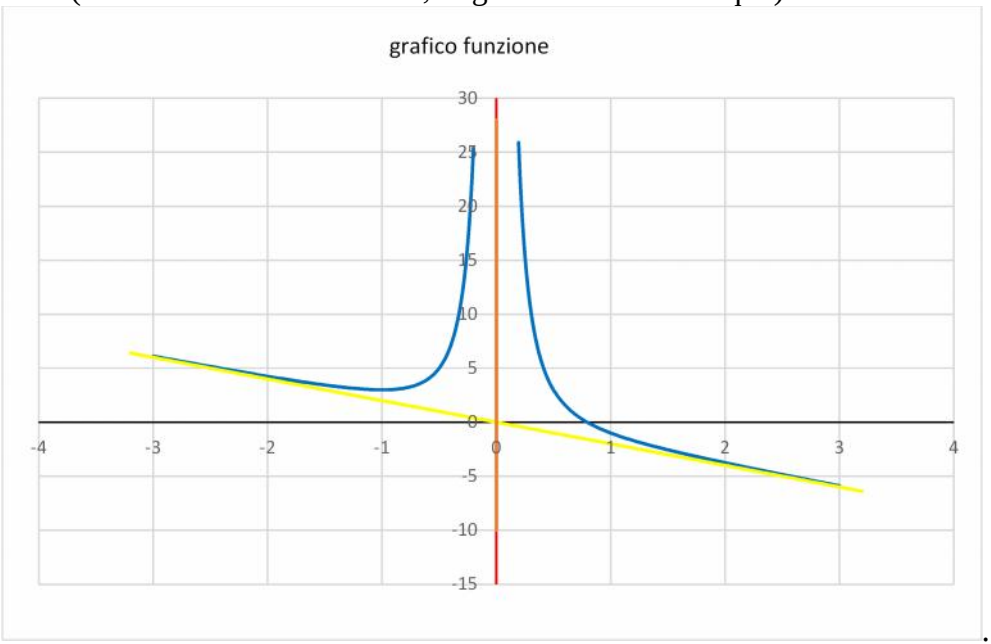
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - 2x = (\to +\infty) - (\to 0) = +\infty$; la funzione presenta asintoto verticale di equazione $x = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{2}{x^3} - 2 = -\frac{2+2x^3}{x^3}$. $y' > 0$ se $\frac{2+2x^3}{x^3} < 0$.
Disequazione fratta, studiamo separatamente numeratore e denominatore:
$\mathcal{N}$: $2 + 2x^3 > 0 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow x > -1$; $\mathcal{D}$: $x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$, come facilmente si evince dal grafico qui sotto, la frazione è minore di zero se $-1 < x < 0$.



.

Funzione strettamente crescente in $[-1, 0[$, strettamente decrescente in $]-\infty, -1]$ e in $]0, +\infty[$. Punto di minimo relativo in $B(-1, 3)$.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{6}{x^4}$. $y'' > 0$, $\forall x \in C.E.$. Funzione convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$. La funzione non presenta punti di flesso.
Grafico (in rosso l'asintoto verticale, in giallo l'asintoto obliquo):



.

6) (8 punti) Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x \cdot cos\, x\, dx$.

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x \cdot cos\, x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x\, d sen\, x = \left(\frac{1}{3} sen^3 x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$\frac{1}{3} sen^3 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} sen^3 0 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$.

7) (6 punti) Sia data la funzione di equazione $y = k(1 + x^2) + log(1 + mx)$.
Determinare i valori dei parametri k e m sapendo che la retta tangente al grafico della funzione nel punto $x_0 = 0$ ha equazione $y = x$.

7) La retta tangente al grafico della funzione nel punto $x_0 = 0$ ha generica equazione $y = y(0) + y'(0) \cdot x$, se la retta tangente nel punto richiesto è $y = x$, allora $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Calcoliamo la funzione e la sua derivata nel punto:
$y(0) = k + log\, 1 = k$, quindi $k = 0$; $y' = \dfrac{m}{1 + mx}$ con $y'(0) = m$, da cui facilmente segue $m = 1$.

8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione
$f(x,\, y, z, w) = x^2 + w^3 - \dfrac{1}{y + z}$.

8) $f'_x = 2x$; $f'_y = f'_z = \dfrac{1}{(y+z)^2}$; $f'_w = 3w^2$.