

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
Corsi di Laurea Triennale in Economia
A.A. 2026/27

Correzione Prova di verifica di fine Precorso Matematica 2026
I Versione

1) Siano A e B due insiemi finiti tali che $\#(A) = 12$, $\#(B) = 9$ e $\#(A \cap B) = 5$. Quale è il numero di elementi dell'insieme $A \cup B$? (con $\#(X)$ si indica la cardinalità dell'insieme X)

☐ 1a) 21

☒ 1b) 16

☐ 1c) 8

☐ 1d) 26

SOLUZIONE: l'insieme $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ con $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$ insiemi disgiunti, inoltre $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ e $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$; ne consegue che $\#(A \setminus B) = \#(A) - \#(A \cap B) = 7$ e $\#(B \setminus A) = \#(B) - \#(A \cap B) = 4$ ed in conclusione $\#(A \cup B) = \#(A \setminus B) + \#(A \cap B) + \#(B \setminus A) = 7 + 5 + 4 = 16$. Risposta corretta 1b.

2) La disequazione $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$ è soddisfatta per:

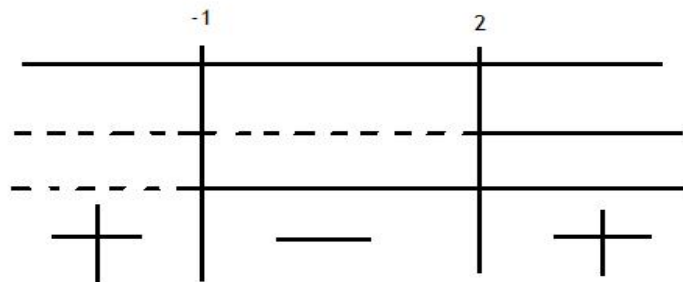
☒ 2a) $-1 < x \leq 2$

☐ 2b) $x \leq -1$ oppure $x > 2$

☐ 2c) $-1 \leq x < 2$

☐ 2d) $x < -1$ oppure $x \geq 2$

SOLUZIONE: classica disequazione fratta, studiamo separatamente numeratore e denominatore: $\mathcal{N}$: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$; $\mathcal{D}$: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$, come facilmente si evince dal grafico qui sotto, la frazione proposta è minore o uguale a zero se $-1 < x \leq 2$. Risposta corretta 2a.



3) Si consideri la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$. Quale fra le seguenti affermazioni è corretta?

☐ 3a) Ha vertice nel punto $(-2, 1)$ e non interseca l'asse delle ascisse

☐ 3b) Ha vertice nel punto $(2, -1)$ e interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti

☐ 3c) Ha vertice nel punto $(2, 1)$ ed è tangente all'asse delle ascisse

☒ 3d) Ha vertice nel punto $(2, 1)$ e non interseca l'asse delle ascisse

SOLUZIONE: la parabola proposta ha discriminante pari a $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$; ciò implica che la parabola non interseca l'asse delle ascisse e l'ascissa del suo vertice ha valore

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$. Risposta corretta 3d.

4) Nel piano cartesiano, l'equazione $x^2 + y^2 - 3 = 0$ rappresenta

☒ 4a) una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$

- ☐ 4b) una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio 9
☐ 4c) una parabola con vertice $(0, \sqrt{3})$
☐ 4d) una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio 3

SOLUZIONE: l'equazione proposta può essere scritta come $x^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2$ che è l'equazione di una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$. Risposta corretta 4a.

5) Se $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, allora:

- ☐ 5a) $\sin(\alpha + \pi) = \frac{3}{5}$
☒ 5b) $\sin(\alpha + \pi) = -\frac{3}{5}$
☐ 5c) $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$
☐ 5d) $\sin(\alpha + \pi) = -\frac{5}{3}$

SOLUZIONE: $\sin(\alpha + \pi) = \sin \alpha \cdot \cos \pi + \sin \pi \cdot \cos \alpha = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. Risposta

corretta 5b. **OSSERVAZIONE:** $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \neq -\frac{2}{5}$.

6) Affinché risulti $\frac{\sqrt{2} \cdot 2^n}{\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = 2$, deve essere:

- ☒ 6a) $n = \frac{4}{3}$
☐ 6b) $n = -\frac{2}{3}$
☐ 6c) $n = -\frac{7}{3}$
☐ 6d) $n = \frac{7}{3}$

SOLUZIONE: $\frac{\sqrt{2} \cdot 2^n}{\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^n}{2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}+n}}{2^{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}+n}}{2^{\frac{5}{6}}} = 2^{\frac{1}{2}+n-\frac{5}{6}} = 2^{n-\frac{1}{3}}$; posto

$2^{n-\frac{1}{3}} = 2$ ovvero $n - \frac{1}{3} = 1$ si ottiene $n = \frac{4}{3}$. Risposta corretta 6a.

7) La disequazione $3 \cdot 2^x < 2 \cdot 3^x$ è soddisfatta per:

- ☐ 7a) $x > 0$
☒ 7b) $x > 1$
☐ 7c) $x > -1$
☐ 7d) $x < 1$

SOLUZIONE: dividiamo entrambi i termini della disuguaglianza per 6:

$$\frac{3 \cdot 2^x}{6} < \frac{2 \cdot 3^x}{6} \Leftrightarrow \frac{2^x}{2} < \frac{3^x}{3} \Leftrightarrow 2^{x-1} < 3^{x-1} \text{ che risulta verificata se } x - 1 > 0 \text{ ovvero } x > 1.$$

Risposta corretta 7b.

8) Siano a e b due numeri reali maggiori di uno e con $a \neq b$; quale fra le uguaglianze che seguono è corretta?

- ☒ 8a) $\log_a b = \log_{a^2} b^2$
☐ 8b) $\log_a b = -\log_b a$
☐ 8c) $\log_a b = \log_b a$

☐ 8d) $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$

SOLUZIONE: $\log_{a^2} b^2 = \frac{\log b^2}{\log a^2} = \frac{2 \log b}{2 \log a} = \frac{\log b}{\log a} = \log_a b$. Risposta corretta 8a.

OSSERVAZIONE: dato che a e b sono due numeri reali maggiori di uno, $\log_a b$ e $\log_b a$ sono due numeri positivi quindi $\log_a b \neq -\log_b a$ perché sono l'uno positivo e l'altro negativo; se a e b sono due numeri reali maggiori di uno $\log_a b = \log_b a$ se e solo se $a = b$, ma nel caso proposto $a \neq b$, quindi $\log_a b \neq \log_b a$; se $a \neq b$ e a e b due numeri reali maggiori di uno, $\log_a b$ è un numero positivo e diverso da 1, quindi $\log_a b \neq \frac{1}{\log_a b}$.

9) L'espressione $(x+1)^3 - (x-1)^3$ risulta uguale a:

☒ 9a) $6x^2 + 2$

☐ 9b) $2x^2 - 6$

☐ 9c) $2x^3 + 6x$

☐ 9d) $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

SOLUZIONE: $(x+1)^3 - (x-1)^3 = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 6x^2 + 2$. Risposta corretta 9a.

10) La disequazione $\log_3(x-3) < 2$ risulta soddisfatta per:

☐ 10a) $x < 12$

☐ 10b) $0 < x < 9$

☐ 10c) $3 < x$

☒ 10d) $3 < x < 12$

SOLUZIONE: $\log_3(x-3) < 2$ se e solo se $0 < x-3 < 3^2$ ovvero $0 < x-3 < 9$, con soluzione $3 < x < 12$. Risposta corretta 10d.

II Versione

1) Siano a e b due numeri reali maggiori di uno e con $a \neq b$; quale fra le uguaglianze che seguono è corretta?

☐ 1a) $\log_a b = -\log_b a$

☐ 1b) $\log_a b = \log_b a$

☒ 1c) $\log_a b = \log_{a^2} b^2$

☐ 1d) $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$

SOLUZIONE: $\log_{a^2} b^2 = \frac{\log b^2}{\log a^2} = \frac{2 \log b}{2 \log a} = \frac{\log b}{\log a} = \log_a b$. Risposta corretta 1c.

OSSERVAZIONE: dato che a e b sono due numeri reali maggiori di uno, $\log_a b$ e $\log_b a$ sono due numeri positivi quindi $\log_a b \neq -\log_b a$ perché sono l'uno positivo e l'altro negativo; se a e b sono due numeri reali maggiori di uno $\log_a b = \log_b a$ se e solo se $a = b$, ma nel caso proposto $a \neq b$, quindi $\log_a b \neq \log_b a$; se $a \neq b$ e a e b due numeri reali maggiori di uno, $\log_a b$ è un numero positivo e diverso da 1, quindi $\log_a b \neq \frac{1}{\log_a b}$.

2) La disequazione $3 \cdot 2^x > 2 \cdot 3^x$ è soddisfatta per:

☒ 2a) $x < 1$

☐ 2b) $x > 1$

☐ 2c) $x > 0$

☐ 2d) $x > -1$

SOLUZIONE: dividiamo entrambi i termini della disuguaglianza per 6:

$$\frac{3 \cdot 2^x}{6} > \frac{2 \cdot 3^x}{6} \Leftrightarrow \frac{2^x}{2} > \frac{3^x}{3} \Leftrightarrow 2^{x-1} > 3^{x-1} \text{ che risulta verificata se } x - 1 < 0 \text{ ovvero } x < 1.$$

Risposta corretta 2a.

3) Nel piano cartesiano, l'equazione $x^2 + y^2 - 9 = 0$ rappresenta

☐ 3a) una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$

☒ 3b) una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio 3

☐ 3c) una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio 9

☐ 3d) una parabola con vertice $(0, \sqrt{3})$

SOLUZIONE: l'equazione proposta può essere scritta come $x^2 + y^2 = 3^2$ che è l'equazione di una circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio 3. Risposta corretta 3b.

4) Si consideri la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$. Quale fra le seguenti affermazioni è corretta?

☒ 4a) Ha vertice nel punto $(2, 1)$ e non interseca l'asse delle ascisse

☐ 4b) Ha vertice nel punto $(2, -1)$ e interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti

☐ 4c) Ha vertice nel punto $(-2, 1)$ e non interseca l'asse delle ascisse

☐ 4d) Ha vertice nel punto $(2, 1)$ ed è tangente all'asse delle ascisse

SOLUZIONE: la parabola proposta ha discriminante pari a $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$; ciò implica che la parabola non interseca l'asse delle ascisse e l'ascissa del suo vertice ha valore

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2. \text{ Risposta corretta 4a.}$$

5) Se $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, allora:

☐ 5a) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$

☐ 5b) $\sin(\pi - \alpha) = \frac{5}{3}$

☒ 5c) $\sin(\pi - \alpha) = \frac{3}{5}$

☐ 5d) $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$

SOLUZIONE: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \pi = \sin \alpha = \frac{3}{5}$. Risposta corretta 5c.

$$\text{OSSERVAZIONE: } \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} =$$

$$\pm \frac{4}{5} \neq \frac{2}{5}.$$

6) Siano A e B due insiemi finiti tali che $\#(A) = 12$, $\#(B) = 7$ e $\#(A \cup B) = 13$. Quale è il numero di elementi dell'insieme $A \cap B$? (con $\#(X)$ si indica la cardinalità dell'insieme X)

☐ 6a) 1

☐ 6b) 8

☐ 6c) 19

☒ 6d) 6

SOLUZIONE: l'insieme $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ con $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$ insiemi disgiunti; ne consegue che $\#(A \cap B) = \#(A \cup B) - \#(A \setminus B) - \#(B \setminus A)$, inoltre

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ e $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ e quindi $\#(A \setminus B) = \#(A) - \#(A \cap B)$ e

$\#(B \setminus A) = \#(B) - \#(A \cap B)$. Riassumendo $\#(A \cap B) = \#(A \cup B) - \#(A \setminus B) - \#(B \setminus A) =$

$\#(A \cup B) - (\#(A) - \#(A \cap B)) - (\#(B) - \#(A \cap B)) =$

$\#(A \cup B) - \#(A) - \#(B) + 2\#(A \cap B)$ ed in conclusione

$\#(A \cap B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cup B) = 12 + 7 - 13 = 6$. Risposta corretta 6d.

7) L'espressione $(x-1)^3 - (x+1)^3$ risulta uguale a:

☐ 7a) $2x^3 + 6x$

☒ 7b) $-6x^2 - 2$

☐ 7c) $-2x^3 - 6x$

☐ 7d) $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

SOLUZIONE: $(x-1)^3 - (x+1)^3 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = -6x^2 - 2$. Risposta corretta 7b.

8) La disequazione $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$ è soddisfatta per:

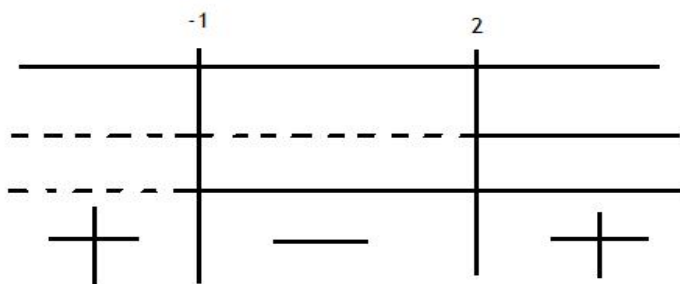
☐ 8a) $-1 \leq x < 2$

☐ 8b) $-1 < x \leq 2$

☐ 8c) $x \leq -1$ oppure $x > 2$

☒ 8d) $x < -1$ oppure $x \geq 2$

SOLUZIONE: classica disequazione fratta, studiamo separatamente numeratore e denominatore:
 $\mathcal{N}: x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$; $\mathcal{D}: x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$, come facilmente si evince dal grafico qui sotto, la frazione proposta è maggiore o uguale a zero se $x < -1$ oppure $x \geq 2$. Risposta corretta 8d.



9) Affinché risulti $\frac{\sqrt{2} \cdot 2^n}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{4}} = 2$, deve essere:

☐ 9a) $n = -\frac{7}{6}$

☒ 9b) $n = \frac{7}{6}$

☐ 9c) $n = -\frac{4}{3}$

☐ 9d) $n = \frac{4}{3}$

SOLUZIONE: $\frac{\sqrt{2} \cdot 2^n}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{4}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^n}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{2^2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}+n}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}+n}}{2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}+n}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}+n-\frac{2}{3}} = 2^{n-\frac{1}{6}}$; posto

$2^{n-\frac{1}{6}} = 2$ ovvero $n - \frac{1}{6} = 1$ si ottiene $n = \frac{7}{6}$. Risposta corretta 9b.

10) La disequazione $\log_3(x-3) > 2$ risulta soddisfatta per:

☐ 10a) $3 < x < 12$

☐ 10b) $x < 12$

☒ 10c) $12 < x$

☐ 10d) $0 < x < 9$

SOLUZIONE: $\log_3(x-3) > 2$ se e solo se $x-3 > 3^2$ ovvero $x-3 > 9$, con soluzione $x > 12$. Risposta corretta 10c.