MOMENTI

La media aritmetica è un elemento di una particolare famiglia di indici statistici chiamati **momenti**. Data la sequenza di *n* osservazioni relative a una variabile quantitativa X, si definisce come **momento di ordine *r*** la media aritmetica delle potenze *r*-esime delle osservazioni

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r , \qquad r = 0, 1, 2, ...$$

mentre nel caso di una distribuzione di frequenza il momento di ordine *r* è dato da

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} x_j^r n_j = \sum_{j=1}^{K} x_j^r f_j , \qquad r = 0, 1, 2, ...$$

Infine, se la distribuzione è in classi, il momento di ordine *r* viene calcolato sulla base dei valori centrali delle singole classi

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} \bar{x}_j^r n_j = \sum_{j=1}^{K} \bar{x}_j^r f_j , \qquad r = 0, 1, 2, ...$$

Il momento di ordine zero è sempre uguale ad 1, mentre per r=1 si ottiene la media aritmetica.
Oltre alla media, un altro indice di uso comune è il secondo momento dall’origine che, a seconda di come sono organizzati i dati raccolti, assume la forma

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} x_j^2 n_j = \sum_{j=1}^{K} x_j^2 f_j$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} \bar{x}_j^2 n_j = \sum_{j=1}^{K} \bar{x}_j^2 f_j$$

Esempio

Data la seguente distribuzione si calcoli il secondo momento

X	freq. relativa
0	0.4
1	0.2
2	0.3
3	0.1
totale	1.0

m_2 = 0×0.4+1×0.2+4×0.3+9×0.1=2.3

Gli indici precedenti sono anche chiamati **momenti dall'origine** per distinguerli dai cosiddetti **momenti centrati** (**o centrali**), il cui generico elemento di ordine *r* (indicato con M_r) è dato da

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r$$

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}(x_j - \bar{x})^r n_j$$

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}(\bar{x}_j - \bar{x})^r n_j$$

a seconda di come sono organizzati i dati, e corrisponde quindi alla media aritmetica delle potenze *r*-esime della variabile scarto, per cui, per cui $M_1 = 0$.

Fra i momenti centrati i più comuni sono quello di ordine due, che corrisponde a

$$M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad M_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}(x_j - \bar{x})^2 n_j \qquad M_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}(\bar{x}_j - \bar{x})^2 n_j$$

ed i due successivi

$$M_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 \qquad M_3 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}(x_j - \bar{x})^3 n_j \qquad M_3 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}(\bar{x}_j - \bar{x})^3 n_j$$

$$M_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4 \qquad M_4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}(x_j - \bar{x})^4 n_j \qquad M_4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K}(\bar{x}_j - \bar{x})^4 n_j$$

- Proprietà dei momenti centrali

Considerata una variabile X il cui momento centrato di ordine *r* è indicato con M_{rx}, il momento centrale di ordine r di una trasformazione lineare del tipo Y = *a* + *b*X corrisponde a:

$$M_{ry} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a + bx_i - (a + b\bar{x})]^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[b(x_i - \bar{x})]^r =$$

$$= b^r \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r = b^r M_{rx}$$

La modifica dell’origine della scala di misura (ossia una traslazione) non altera il valore del momento di ordine *r*, mentre un cambiamento dell’unità di misura modifica il valore di questo indice.